

CORRIGÉ « LASER PLASMA À HAUT ÉCLAIREMENT » (MINES 1 PC 2018)

Toutes les AN ont été effectuées sans la calculatrice...

I. — GÉNÉRATION D'HARMONIQUES DANS LES GAZ

A. — Champ laser et champ coulombien

□ 1 – La force électrique coulombienne exercée par le proton sur l'électron est $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$. C'est une force centrale, de centre le proton, qui dérive de W_p telle que $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} W_p = -\frac{dW_p}{dr} \vec{u}_r$, ce qui conduit à $W_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ (origine à l'infini).

□ 2 – L'énergie mécanique est $W_m = W_c + W_p$, avec $W_c = \frac{1}{2}mv^2$ l'énergie cinétique de l'électron. Le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel du proton, en projection sur $\vec{u}_r$, s'écrit : $-m\frac{v^2}{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, ce qui conduit à $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 mr}}$. On en déduit : $W_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} < 0$ (état lié).

La quantification proposée pour le moment cinétique (modèle de Bohr) s'écrit $mr v = n\hbar$, ce qui donne via l'expression de v :

$$r = n^2 \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{m\pi e^2} = n^2 a_0$$

Dans l'état fondamental $n=1$ et $-W_0(\text{eV}) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{me^3}{8(\epsilon_0 \hbar)^2}$. On obtient $-W_0 \approx -13,6 \text{ eV}$, cohérent avec la valeur « attendue » de $-13,6 \text{ eV}$ pour l'atome d'hydrogène.

□ 3 – Le champ électrique ressenti par l'électron est celui créé par le proton, ce qui donne $E_c = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \approx 5 \times 10^{11} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ dans l'état fondamental.

D'après le document 1 l'énergie totale de l'impulsion laser W_T est délivrée pendant une durée T , ce qui donne la puissance $P = \frac{W_T}{T} = 20 \text{ GW}$ (valeurs pour un gaz).

• **Avant la lentille** le faisceau a un diamètre D , donc l'éclairement I (uniforme) est tel que $P = \pi \frac{D^2}{4} I$. D'après l'expression liant I au champ, on en déduit l'amplitude du champ électrique avant la lentille :

$$E_\ell = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{8P}{\epsilon_0 c \pi D^2}} \approx 4 \times 10^8 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

• **Au foyer** le faisceau a un rayon R_0 (waist), que l'on obtient via la figure 1.c et la relation fournie $\tan \alpha = \frac{D}{f'} \approx \frac{\lambda_0}{\pi R_0}$, soit $R_0 \approx \frac{\lambda_0 f'}{\pi D}$. Ensuite on procède comme précédemment, ce qui donne :

$$E_f = \sqrt{\frac{8P}{\epsilon_0 c \pi R_0^2}} = \sqrt{\frac{8\pi P D^2}{\epsilon_0 c \lambda_0^2 f'^2}} \approx 2 \times 10^{11} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

Ce champ est du même ordre de grandeur que celui ressenti par l'électron : le faisceau va pouvoir ioniser la matière de la cible, ce qui n'était pas possible avant la focalisation.

A. — Un mécanisme en trois étapes

□ 4 – On travaille à l'échelle de l'atome donc $|z| \approx a_0$, ce qui donne $|k_0 z| \approx \frac{2\pi a_0}{\lambda_0} \approx 4 \times 10^{-4} \ll 2\pi$: on peut donc négliger le terme en $k_0 z$.

□ 5 – L'énergie potentielle d'interaction est celle de la question 1 avec $r = |x|$: $W_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|x|}$ ce qui correspond bien aux courbes de la figure II.a (allure d'hyperboles).

□ 6 – La force de Lorentz est $\vec{F} = -e(\vec{E}(z, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(z, t))$. Par ailleurs la relation de structure d'une

OPPH se propageant selon z croissant dans le vide est $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c}$.

Cette force dérive d'une énergie potentielle si on peut négliger la contribution magnétique devant la contribution électrique, ce qui est le cas pour $\frac{vB}{E} \ll 1$; la relation de structure donne alors (onde transverse donc $B = E/c$) la condition $v \ll c$, c'est-à-dire qu'il faut des **électrons non relativistes**. Dans ce cas, la force peut s'écrire $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} W_{p,\text{las}}$ avec $W_{p,\text{las}} = eE_f x \cos(\omega_0 t)$ (on peut choisir la constante nulle en $x = 0$), et donc :

$$W_{p,\text{tot}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|x|} + eE_f x \cos(\omega_0 t)$$

Dans la figure II.b le champ est dirigé dans le **sens des x décroissants** pour que l'électron aille vers la droite. La courbe en pointillés correspond manifestement à $W_{p,\text{las}}$ (cosinus négatif ici).

□ 7 – Le franchissement de la barrière est facilité quand $|\cos(\omega_0 t)| = 1$, c'est-à-dire quand l'action du champ électrique de l'onde est la plus importante, donc :

- au début du cycle ($t = nT_0$), l'électron est alors extrait par les $x < 0$ puisque le champ est dirigé vers la droite ;
- au bout d'une demi-période, l'électron est alors extrait par les $x > 0$ puisque le champ est dirigé vers la gauche.

On peut déterminer $\tilde{x}_0$ pour le cas $x > 0$: cela correspond au x tel que $\frac{dW_{p,\text{tot}}}{dx} = 0$, ce qui conduit à $x^2 = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 E_f \cos(\omega_0 t)}$, qui n'a de solution que si $\cos(\omega_0 t) < 0$, ce qui est bien le cas au bout d'une demi-période puisque $\cos(\omega_0 t) = -1$. Le raisonnement est identique pour les $x < 0$.

On en déduit donc $\tilde{x}_0 = \pm \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0 E_f}}$.

On veut $W_{p,\text{tot}}(\tilde{x}_0) = -W_0$, ce qui conduit après calculs à (on se place pour $x > 0$ et aux instants tels que $\cos(\omega_0 t) = -1$) : $E_{f,i} = \frac{\pi\epsilon_0 W_0^2}{e^3} \approx 3 \times 10^{10} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$: **le gaz est bien ionisé** (cf. valeur de E_f).

□ 8 – L'électron n'est soumis qu'au champ électrique du laser, le PFD s'écrit donc selon $\vec{u}_x$: $m\ddot{x} = -eE_f \cos(\omega_0 t)$. On en déduit la vitesse et la position compte tenu des conditions initiales $x(t_i) = 0$ et $v(t_i) = 0$:

$$\dot{x}(t) = \frac{eE_f}{m\omega_0} (\sin(\omega_0 t_i) - \sin(\omega_0 t))$$

$$x(t) = \frac{eE_f}{m\omega_0^2} [(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t_i)) + \omega_0(t - t_i) \sin(\omega_0 t_i)]$$

Comme l'ionisation a lieu à un instant t_i tel que $|\cos(\omega_0 t_i)| = 1$, et donc $\sin(\omega_0 t_i) = 0$, on en déduit finalement :

$$\dot{x}(t) = -\frac{eE_f}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{eE_f}{m\omega_0^2} [(\cos(\omega_0 t) - 1)]$$

REMARQUE

L'énoncé n'est pas très clair sur le fait que t_i correspond à un des instants privilégiés déterminés à la question précédente.

Pour que x_0 soit bien négligeable lors de l'étude du mouvement de l'électron dans le champ laser, le déplacement de l'électron pendant $T_0/2$ doit être très grande devant x_0 .

□ 9 – D'après l'expression précédente de la vitesse, on en déduit l'expression de l'énergie cinétique :

$$W_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{e^2 E_f^2}{2m\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t)$$

En développant et en prenant la moyenne temporelle, on en déduit

$$\langle W_c \rangle = \frac{e^2 E_f^2}{4m\omega_0^2}$$

La fréquence ν du photon émis est donnée par $h\nu = W_{c,\max} + W_0 \approx 2,0 \times 10^2$ eV. On en déduit l'étendue spectrale $\Delta\nu = \nu$ (cf. énoncé), et donc l'ordre de grandeur de la durée de l'impulsion δt par $\delta t \cdot \Delta\nu \approx 1$, ce qui conduit à $\delta t \approx 10^{-17}$ s. Cette valeur est cohérente avec la durée des impulsions mentionnée dans l'introduction du sujet.

□ 10 – Les phénomènes étudiés sont linéaires¹, on peut donc utiliser le principe de superposition : n'importe quel signal peut alors être obtenu par superposition de signaux harmoniques (Fourier).

Les signaux ont parcouru une distance x à la vitesse c , on ajoute donc le déphasage dû à cette propagation :

$$s_+(x, t) = S_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad \text{et} \quad s_-(x, t) = -S_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{T_0}{2} - \frac{x}{c} \right) \right].$$

L'amplitude est maximale si les deux signaux sont en phase, donc si les deux cosinus sont en opposition de phase (du fait du signe moins devant le second) : le décalage temporel $\frac{T_0}{2}$ doit être un multiple demi-entier de la période T , soit : $\frac{T_0}{2} = \left(p + \frac{1}{2}\right) T$, avec $p \in \mathbb{N}$. On en déduit $\omega = (2p + 1)\omega_0$, avec $p \in \mathbb{N}$.

REMARQUE

Cela se retrouve aussi par le calcul. Le signal résultant est :

$$\begin{aligned} s(x, t) &= S_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] - S_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{T_0}{2} - \frac{x}{c} \right) \right] \\ &= -2S_0 \sin \left(\frac{\omega T_0}{4} \right) \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{\omega T_0}{2} \right] \\ &= -2S_0 \sin \left(\pi \frac{\omega}{2\omega_0} \right) \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{\omega T_0}{2} \right] \end{aligned}$$

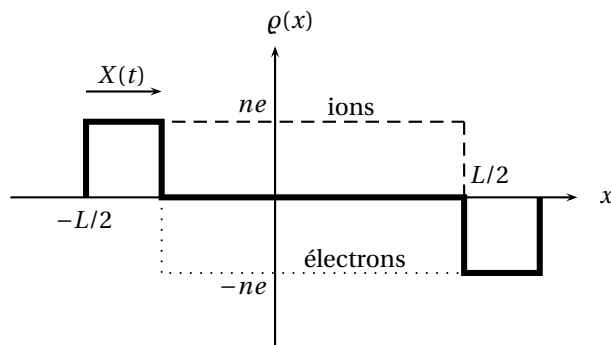
L'amplitude est maximale pour $\sin \left(\pi \frac{\omega}{2\omega_0} \right)$ maximal, ce qui redonne le même résultat. La première méthode est plus rapide et correspond probablement à ce qui était attendu !

Finalement, le spectre ne comporte que les harmoniques impaires $\omega = (2p + 1)\omega_0$, et s'étend entre (on suppose une valeur minimale nulle pour W_c) $\nu_{\min} \approx \frac{W_0}{h} \approx 9\nu_0$ (le premier harmonique serait donc le numéro 9 ou 10) et 10^{17} Hz (cf. Q9) : le spectre est principalement situé dans le domaine UV et le début des rayons X, ce qui est cohérent avec l'introduction du sujet.

II. — GÉNÉRATION D'HARMONIQUES SUR UN MIROIR PLASMA

B. — Pulsation propre

□ 11 – La distribution des ions est fixe et uniforme sur l'intervalle $\pm L/2$ et celle des électrons aussi, mais décalée de $X(t)$. Dans les zones où $\rho(x)$ n'est pas nulle, elle vaut ne en valeur absolue (cf. figure).



On cherche le champ électrique dans la zone de $\rho = 0$. On est en présence de deux nappes planes d'épaisseur $X(t)$ et de densité volumique de signes opposés.

Pour commencer, considérons une nappe plane de densité volumique ρ_0 entre $x = \pm X(t)/2$. Les invariances montrent que² le champ ne dépend que de x et les symétries qu'il est selon $\vec{u}_x$ et que la fonction

1. Du moins on l'espère car la génération d'harmoniques étudiée dans la suite ne l'est pas !
2. Je ne développe pas...

$E(x)$ est impaire. On écrit l'équation de Maxwell-Gauss en distinguant trois zones :

$$E(z) = \begin{cases} A & \text{si } x > X(t)/2 \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x + B & \text{si } x \in [-X/2; X/2] \\ C & \text{si } x < -X(t)/2 \end{cases}$$

Comme $E(x)$ est impaire $C = -A$ et $B = 0$. Comme le champ est continu pour une répartition volumique, on en déduit la constante. Ainsi :

$$E(z) = \begin{cases} \frac{\rho_0 X(t)}{2\epsilon_0} & \text{si } x > X/2 \\ \frac{\rho_0 X(t)}{2\epsilon_0} x & \text{si } x \in [-X/2; X/2] \\ -\frac{\rho_0 X(t)}{2\epsilon_0} & \text{si } z < -X/2 \end{cases}$$

Dans la zone étudiée, le champ créé par la nappe de gauche ($\rho_0 = ne$) est donc $\frac{neX(t)}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$, et celui créé par la nappe de droite ($\rho_0 = -ne$) est $-\frac{neX(t)}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$. Le champ résultant est donc $\vec{E} = \frac{neX(t)}{\epsilon_0} \vec{u}_x$.

REMARQUE

L'énoncé attendait-il une méthode plus rapide utilisant le champ créé par un plan infini, combiné avec un passage volumique-surfacique (hors programme) ?

Dans cette zone, le PFD appliqué à l'électron s'écrit $m\ddot{x} \vec{u}_x = -e\vec{E} = -\frac{ne^2 X(t)}{\epsilon_0} \vec{u}_x$, ce qui donne l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$.

B. — Propagation dans un plasma homogène

□ 12 – On rappelle les équations de Maxwell dans le cas général, puis avec $\rho = 0$ (milieu localement neutre). On applique le PFD à un électron en négligeant l'action du champ $\vec{B}$ (électrons non relativistes, voir Q6), ce qui donne pour le vecteur densité de courant électrique $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$. on peut l'écrire en notation complexe $\vec{j} = -i \frac{ne^2}{m\omega} \vec{E} = \underline{\gamma} \vec{E}$, avec $\underline{\gamma} = -i \frac{ne^2}{m\omega}$ la conductivité complexe du plasma, qui est imaginaire pure.

REMARQUE

L'énoncé demande alors d'établir l'équation de propagation : quel est l'intérêt de passer par la conductivité complexe si c'est pour revenir en réels maintenant ?

Pour établir l'équation d'onde on calcule $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E}$ de deux manières (via le formulaire et via les équations de Maxwell). On obtient après calculs :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E}$$

On en déduit alors la relation de dispersion en passant en complexes (laplacien remplacé par $-k^2$, dérivée temporelle première par $i\omega$) : $-k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}$ qui est bien la relation de l'énoncé. La propagation n'est possible que pour $\omega > \omega_p$ (k réel), ce qui conduit à $n < \frac{m\epsilon_0 \omega^2}{e^2} = n_c$. Si la propagation est impossible, l'onde est réfléchie.

□ 13 – L'onde se réfléchit en x_c tel que $n_e(x_c) = n_c$. Comme $n_{\max} > n_c$ d'après le document 3, il existe un x tel que $n_e(x) = n_c$. À partir de l'expression de $n_e(x)$ on en déduit $x_c = L \ln \frac{n_c}{n_{\max}}$.

□ 14 – D'après le document 3 la direction de la réflexion suit les lois de Descartes de l'optique géométrique, donc k_y se conserve. Comme $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, on en déduit via la relation de dispersion $k_x^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} - k_y^2$. La réflexion a lieu pour $k_x^2 < 0$ ce qui donne $\omega_p^2 > \omega^2 - c^2 k_y^2$. Comme k_y se conserve, on peut l'écrire $k_y = k \sin \beta = \frac{\omega}{c} \sin \beta$ (on utilise son expression avant le plasma). Ainsi, après calculs on obtient

$n < n_c \cos^2 \beta$, ce qui donne l'abscisse demandée : $x_r = L \ln \frac{n_c \cos^2 \beta}{n_{\max}} = x_c + 2L \ln (\cos \beta) < x_c$.

B. — Excitation d'onde plasma à la surface

□ 15 – Les électrons passent à l'abscisse x à l'instant $t_0(x) = \frac{x+3L}{v}$.

La phase en (x, t) est telle que $\phi(x, t) = \phi(x, t_0(x)) + \omega_p(x)(t - t_0(x))$, ce qui donne $\phi(x, t) = \omega_p(x) \left(t - \frac{x+3L}{v}\right)$. On utilise ensuite l'expression de $\omega_p(x) = \sqrt{\frac{n_e(x)e^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{n_{\max}e^2}{m\epsilon_0}} \exp(x/2L)$, que l'on peut donc écrire $\omega_p(x) = \omega_{\max} \exp(x/2L)$. Finalement :

$$\phi(x, t) = \omega_{\max} e^{x/2L} \left(t - \frac{x+3L}{v}\right)$$

□ 16 – Calculons $\vec{k}_p \cdot \vec{u}_x$:

$$\vec{k}_p \cdot \vec{u}_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \omega_{\max} e^{x/2L} \left(\frac{t}{L} - \frac{x}{Lv} - \frac{5}{v}\right)$$

L'instant d'émission en x est tel que $\vec{k}_p \cdot \vec{u}_x = 0$, ce qui donne $t = \frac{x+5L}{v}$. Comme $x \in [-3L; 0]$ et $v > 0$, on en déduit qu' **il existe un instant $t > 0$ tel qu'il y ait émission** . En revanche, si le paquet se propageait selon $x < 0$, ce qui revient à prendre $v < 0$, il n'y a pas de solution $t > 0$ et donc l'émission est impossible.

□ 17 – Le décalage temporel est (onde plane) $\frac{\vec{k} \cdot \vec{MM}_0}{\omega} = \frac{y \sin \beta}{c}$.

À l'ordonnée y l'instant d'entrée des électrons dans la zone hétérogène est $\frac{y \sin \beta}{c}$; pour atteindre l'abscisse x , il leur faut un temps supplémentaire $\frac{x+3L}{v}$. On en déduit $t_0(x, y) = \frac{y \sin \beta}{c} + \frac{x+3L}{v}$. La phase est donc désormais donnée par :

$$\phi(x, y, t) = \omega_{\max} e^{x/2L} \left(t - \frac{y \sin \beta}{c} - \frac{x+3L}{v}\right)$$

La condition d'émission $\vec{k}_p \cdot \vec{u}_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ conduit après calculs à :

$$y = \frac{c}{v \sin \beta} (-x + vt - 5L)$$

qui est bien, à t fixé, l'équation d'une droite dont la pente est constante et l'ordonnée à l'origine augmente « à la vitesse v » au cours du temps. L'émission semble s'effectuer le long d'un cône de sommet $M(x, y)$ et de demi-angle au sommet α tel que $\tan \alpha = \frac{v \sin \beta}{c}$. Cela ressemble à la formation d'un sillage (plutôt type cône de Mach puisque l'angle α dépend de v).

Les paquets d'électrons excitent des oscillations plasma à la fréquence plasma locale $\omega_p(x)$ qui varie de manière continue dans la zone hétérogène : **le spectre est continu et $\omega < \omega_{\max}$** .

III. — INTERACTION D'UNE IMPULSION AVEC UNE FEUILLE MINCE

□ 18 – Si la température du plasma est assez élevée l'énergie mécanique des particules sera principalement d'origine cinétique $\frac{3}{2} k_B \theta_e$ et les interactions directes entre particules négligeables, ce qui permet d'utiliser le modèle du gaz parfait...

□ 19 – On écrit la conservation du nombre total de particules (pour une section transverse unité) :

• avant expansion : $n_{0, \max} \delta$;

• après expansion : $n_{L, \max} \delta + 2 \int_{-\infty}^0 n_{L, \max} \exp(x/L) dx = n_{L, \max} (\delta + 2L)$.

On en déduit $n_{L, \max} = n_{0, \max} \frac{\delta}{\delta + 2L}$. Comme la pulsation plasma est proportionnelle à $n^{1/2}$, on en dé-

duit $\omega_{L, \max} = \omega_{0, \max} \sqrt{\frac{\delta}{\delta + 2L}}$.

□ 20 – D'après l'énoncé $\omega_{L, \max} \approx 18,7 \omega_0 \sqrt{\frac{\delta}{\delta + 2L}}$. À partir de graphique IV.b, en prenant $\delta = 10$ nm (manifestement $L \ll \delta$ vu le spectre à 100 nm), et en supposant $\omega_{L, \max} \approx 13,5$, on obtient $L \approx 2$ nm.

REMARQUE

On pourrait exploiter l'ensemble des données via une étude graphique, mais ce n'est pas raisonnable sans calculatrice...

On utilise ensuite la relation du document 4 entre L et θ_e , avec $T = 30$ fs pour un solide d'après le document 1. On trouve $\theta_e \approx 10^6$ K (!).

□ **21** – L'énergie cinétique totale des électrons est (en utilisant Q19) :

$$n_{L,\max}(\delta + 2L) \frac{3}{2} k_B \theta_e = n_{0,\max} \delta \frac{3}{2} k_B \theta_e = \text{cste}$$

Si δ augmente θ_e diminue.

On reprend l'expression de $\omega_{L,\max}$ de Q19, en remplaçant L par $T \sqrt{\frac{Z k_B \theta_e}{m_i}}$. Par ailleurs, d'après l'expression $L = T \sqrt{\frac{Z k_B \theta_e}{m_i}}$, on en déduit $\frac{L^2}{L_0^2} = \frac{\theta_e}{\theta_{e,0}} = \frac{\delta_0}{\delta}$ puisque $\delta \theta_e = \text{cste}$. Finalement, on en déduit $L = L_0 \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta}}$, et donc :

$$\omega_{L,\max} = \omega_{0,\max} \sqrt{\frac{\delta}{\delta + 2L_0 \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta}}}}$$

La valeur de $\omega_{L,\max}$ augmente moins vite avec δ que dans le premier modèle, et donc... ?

Un peu de lecture :

- Catoire F, Quintard L., Hort O., Dubrouil A., Constant E., « Les sources attosecondes », *Photoniques* **70** (2014) 28-33.
- Ruchon T., Salières P., Zeitoun P., Sebban S., « Sources cohérentes de laboratoire dans l'extrême ultraviolet », *Reflète de la physique* **21** (2010) 30-34.

Corrigé proposé par XAVIER DUCROS (ups@xavierducros.org) ; merci à MARIE-NOËLLE SANZ pour sa relecture.