

Questionnements et découvertes autour de l'atome le plus simple de l'univers

Filière MP

Partie I- Modèle historique de Bohr de l'atome d'hydrogène (1913)

Q 1. Force électrique :

$$\vec{f}_e = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Q 2. Théorème de quantité de mouvement (avec $\vec{v} = v \vec{u}_\theta$) :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = m_e \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta - m_e \frac{v^2}{r} \vec{u}_r$$

La projection suivant $\vec{u}_r$ donne :

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r m_e}} \quad (1)$$

Q 3.

$$\vec{L} = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v} = r \vec{u}_r \wedge m_e v \vec{u}_\theta = m_e v r \vec{u}_z \Rightarrow L = m_e v r$$

soit :

$$L = \sqrt{\frac{m_e e^2 r}{4\pi\epsilon_0}}$$

Q 4. Énergie potentielle :

$$\vec{f}_e = -\vec{\text{grad}} E_p = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r \Rightarrow E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

L'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m_e v^2$ et d'après l'équation (1), on trouve :

$$E_c = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{E_p}{2}$$

Q 5. $L = n\hbar$, soit :

$$L^2 = \frac{m_e e^2 r_n}{4\pi\epsilon_0} = n^2 \hbar^2 \Rightarrow r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2 = a_B n^2 \quad \text{avec} \quad a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$$

Q 6. Énergie mécanique :

$$E_n = E_c + E_p = \frac{E_p}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B} \times \frac{1}{n^2} = -\frac{R_y}{n^2} \quad \text{avec} \quad R_y = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B}$$

Q 7.

$$a_B = 52,919 \text{ pm} \quad \text{et} \quad R_y = 13,606 \text{ eV}$$

Q 8.

$$v_n = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n m_e}} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_B m_e}} \times \frac{1}{n} = \sqrt{\frac{2R_y}{m_e}} \times \frac{1}{n}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{R_y}{m_e}} = 2,1877 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{v_1}{c} \ll 1 \Rightarrow \text{Le mouvement de l'électron est non relativiste.}$$

Partie II- Une résolution simplifiée de l'atome de Bohr par l'équation de Schrödinger (1926)

Q 9. Equation de Schrödinger indépendante du temps :

$$E\kappa(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\kappa(\vec{r}) + E_p(\vec{r})\kappa(\vec{r})$$

Q 10.

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Q 11. $E_p(\vec{r}) = 2E$ et $\kappa(\vec{r}) = \kappa(\theta)$; soit :

$$E\kappa(\theta) = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\kappa(\theta) + 2E\kappa(\theta) \Rightarrow E\kappa(\theta) = \frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\kappa(\theta) = \frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{1}{R^2}\frac{d^2\kappa(\theta)}{d\theta^2}$$

Résolution ; on pose $\eta^2 = \frac{m_e R e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}$, l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2\kappa(\theta)}{d\theta^2} + \eta^2\kappa(\theta) = 0 \Rightarrow \kappa(\theta) = A\exp(i\eta\theta) + B\exp(-i\eta\theta) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}$$

Q 12. $\kappa(\theta + 2\pi) = \kappa(\theta) \Rightarrow \exp(\pm 2i\pi\eta) = 1 \Rightarrow \eta = k$ (entier) ; soit :

$$\frac{m_e R e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} = k^2 \Rightarrow R_k = a_B k^2 \text{ et } E_k = -\frac{R_y}{k^2}$$

Partie III- Spectre de raies de l'hydrogène

Q 13. Énergie du photon lors de la transition :

$$\Delta E = E_{sup} - E_{inf} = h\nu$$

Dans le cas de l'atome d'hydrogène :

$$\Delta E = h\frac{c}{\lambda_{nn'}} = -\frac{R_y}{n^2} + \frac{R_y}{n'^2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{nn'}} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ avec } R_H = \frac{R_y}{hc}$$

Q 14. Pour $n' = 2$:

$$\lambda_{n2} = \frac{4n^2}{n^2 - 4} \times \frac{1}{R_H}$$

Nom de la raie	H_α	H_β	H_γ	H_δ
λ_{Ritz}	656,561 nm	486,342 nm	434,234 nm	410,351 nm
λ_{Exp} (Valeurs de 1885)	656,3 nm $\pm$ 0,3 nm	486,1 nm $\pm$ 0,2 nm	434,0 nm $\pm$ 0,2 nm	410,2 nm $\pm$ 0,2 nm

On constate que les intervalles d'incertitudes expérimentales englobent les valeurs de Ritz !!

Partie IV- Corrections relativistes de Sommerfeld (1916) : introduction de la constante de structure fine

Q 15.

$$v_1^2 = \frac{R_y}{m_e} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2 = \alpha^2 c^2 \Rightarrow \alpha = \frac{v_1}{c}$$

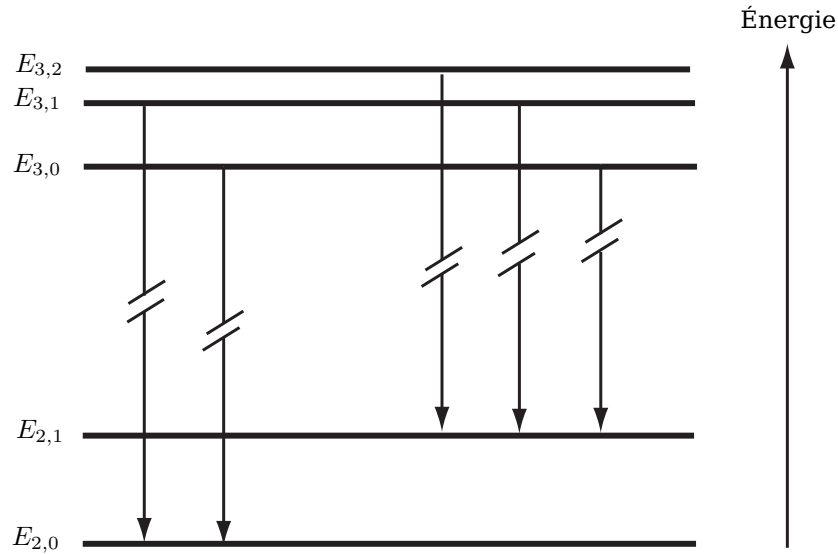
La constante de structure fine α est sans dimension !

Q 16. Applications numériques :

$$\alpha = 0,00729 \text{ et } \frac{1}{\alpha} = 137,13$$

Q 17.

- Au niveau $n = 2$ correspond 2 sous-niveaux d'énergie : $E_{2,0}$ et $E_{2,1}$.
- Au niveau $n = 3$ correspond 3 sous-niveaux d'énergie : $E_{3,0}$, $E_{3,1}$ et $E_{3,2}$.

Q 18.Figure 1 Structure fine simplifiée de la raie H_α

$$E_{n,l} = -\frac{R_y}{n^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{n+l} - \frac{3}{4} \right) \right)$$

$$\Delta E_f = E_{2,1} - E_{2,0} = -\frac{R_y}{4} \left(-\frac{\alpha^2}{4} \right) = \boxed{\frac{\alpha^2 R_y}{16} = 4,52 \cdot 10^{-5} \text{ eV}}$$

Q 19.

$$E_{3,1} - E_{2,0} = \frac{hc}{\lambda_a} = hc\sigma_a \quad \text{et} \quad E_{3,1} - E_{2,1} = \frac{hc}{\lambda_b} = hc\sigma_b$$

$$\Rightarrow hc(\sigma_a - \sigma_b) = E_{2,1} - E_{2,0} = \Delta E_f \quad \text{ou} \quad \boxed{\Delta\sigma = \frac{\Delta E_f}{hc} = 0,364 \text{ cm}^{-1}}$$

Q 20.

$$\lambda_m = \frac{1}{\sigma_m} = 656,3 \text{ nm}, \text{ il s'agit de la couleur ROUGE}$$

L'écart relatif :

$$\boxed{\frac{\Delta\sigma_{exp}}{\sigma_m} = 2,36 \cdot 10^{-5}}$$

$$\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma_m} \right)_{\text{doublet sodium}} = 10,2 \cdot 10^{-4} > \frac{\Delta\sigma_{exp}}{\sigma_m}$$

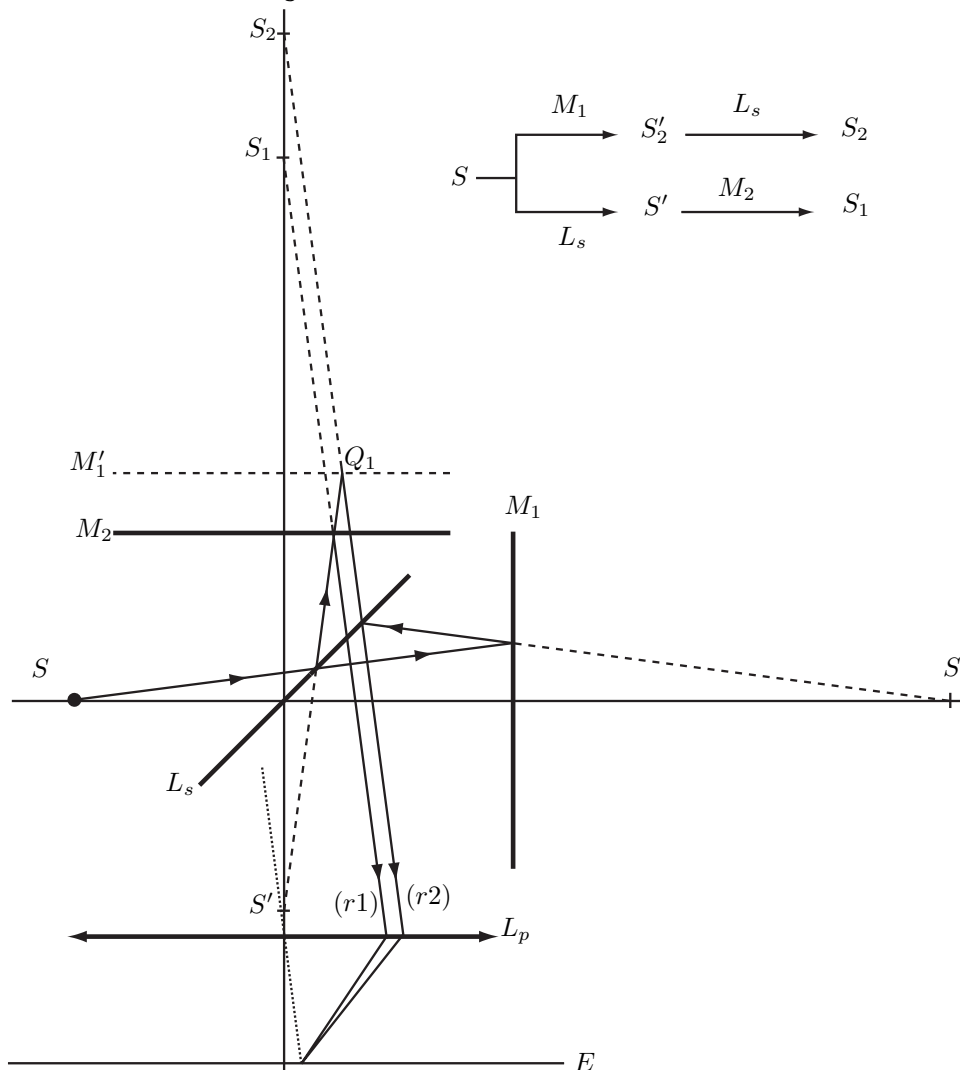
Partie V- Résolution interférométrique d'un doublet spectral**Q 21.** Les lames qui compose L_s sont :

- la séparatrice (*fixe*) :
 - permet d'assurer la division d'amplitude afin d'avoir un coefficient de transmission et de réflexion égaux à $1/2$.
 - est une lame semi-réfléchissante (*semi-argentée*).
 -
- la compensatrice (*mobile-réglable*) :
 - est de même épaisseur que la séparatrice (5 à 10 mm).

- (parallèle à la séparatrice) permet de compenser la différence de marche supplémentaire dûs aux réflexions sur les miroirs et la séparatrice.

Q 22. Q 23.

Figure 2 Interféromètre de Michelson



Q 24. Les franges d'interférences observées sur l'écran sont des anneaux concentriques ! On les appelle les franges d'égale inclinaison ou de Haidinger.

Q 25. Différence de marche :

$$\delta(C) = 2e$$

Q 26.

$$p_1 = \frac{\delta}{\lambda_1} = \delta\sigma_1 \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{\delta}{\lambda_2} = \delta\sigma_2$$

Q 27. Il ya brouillage pour $p_1 - p_2$ est un-demi entier ! On pose $p_1 - p_2 = n + 1/2$ avec $n \in \mathbb{N}$.

$$p_1 - p_2 = \delta_n(\sigma_1 - \sigma_2) = \delta_n \Delta\sigma = n + \frac{1}{2}$$

$$D_\delta = \delta_{n+1} - \delta_n = \frac{1}{\Delta\sigma}$$

On parle de l'anti-coïncidence ou interférences destructives !

Application numérique : cas du doublet H_α (écart spectral $\Delta\sigma_{\text{exp}} = 0,360 \text{ cm}^{-1}$)

$$\delta = 2e \Rightarrow D_e = \frac{1}{2\Delta\sigma_{\text{exp}}} = 1,39 \text{ cm}$$

Q 28.

$$\frac{L_o}{160} = 5D_e = \frac{2,5}{\Delta\sigma_{\text{exp}}} \Rightarrow L_o = \frac{400}{\Delta\sigma_{\text{exp}}} = 11,1 \text{ m}$$

Q 29.

Partie VI- Calcul d'une structure fine par l'interaction spin-orbite

Q 30. Moment cinétique :

$$\vec{L} = m_e r v \vec{u}_z$$

Q 31. Champ magnétique :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I_p}{2r} \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad I_p = \frac{q_p}{T} = \frac{+e}{T} \quad \text{et} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

D'où :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o e v}{4\pi r^2} \vec{u}_z = \frac{\mu_o e}{4\pi r^3 m_e} \vec{L}$$

Q 32.

$$\begin{aligned} E_{SO} &= -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}_p \quad \text{avec} \quad \vec{\mu}_e = g_e \left(-\frac{e}{2m_e} \right) \vec{S} \quad \text{et} \quad \vec{B}_p = \vec{B} \\ &= g_e \frac{e}{2m_e} \frac{\mu_o e}{4\pi r^3 m_e} \vec{L} \cdot \vec{S} \\ &= \frac{g_e \mu_o e^2}{8\pi r^3 m_e^2} \vec{L} \cdot \vec{S} \\ \text{or} \quad \gamma_e^2 \frac{\mu_o}{2\pi} &= \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{e^2}{4m_e^2} = \frac{\mu_o e^2}{8\pi m_e^2} = \frac{a_B^3 \alpha^2 R_y}{\hbar^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$E_{SO} = g_e \alpha^2 \left(\frac{a_B}{r} \right)^3 R_y \frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{\hbar^2}$$

Q 33. Expérience de Stern et Gerlach !! Voir CCP-Epreuve spécifique - Filière TPC - Physique 2016.

Q 34.

$$\begin{aligned} \iiint |\Psi_{2,1}(\vec{r})|^2 \left(\frac{a_B}{r} \right)^3 d^3 \vec{r} &= \iiint \frac{1}{\pi(4a_B)^3} \frac{a_B}{r} \sin^2(\theta) \exp\left(-\frac{r}{a_B}\right) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{32a_B^2} \int_0^\infty r \exp\left(-\frac{r}{a_B}\right) dr \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Q 35. Les états (n, l, j) :

$$n = 2, \quad \begin{cases} l = 0 \rightarrow j = \frac{1}{2} \\ l = 1 \rightarrow j = 1 \pm \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{soient : } (2, 0, 1/2); (2, 1, 1/2) \text{ ou } (2, 1, 3/2)$$

◇ L'état $(2, 0, 1/2)$:

$$E_{SO,2,0,1/2} = 0$$

◇ L'état $(2, 1, 1/2)$:

$$E_{SO,2,1,1/2} = -\frac{g_e \alpha^2 R_y}{24}$$

◇ L'état $(2, 1, 3/2)$:

$$E_{SO,2,1,3/2} = \frac{g_e \alpha^2 R_y}{48}$$

$$\diamond E_{SO,n=2}^{min} = E_{SO,2,1,1/2} \quad \text{et} \quad E_{SO,n=2}^{max} = E_{SO,2,1,3/2}$$

$$\Delta E_{SO,n=2} = \frac{g_e \alpha^2 R_y}{16}$$

Après l'analyse de Thomas :

$$\Delta E_{SO,n=2} = \frac{1}{2} g_e \frac{\alpha^2 R_y}{16} = \frac{\alpha^2 R_y}{16} = \Delta E_f$$

Partie VII- Encore plus fin (!) : la structure hyperfine du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène

Q 36. Pour $\lambda = 21,1 \text{ cm}$:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 1421,8 \text{ MHz} \quad ; \quad (\text{choix de } 1420 \text{ MHz})$$

L'écart en énergie :

$$\Delta E_{hf \text{ exp}} = h\nu = 588,0 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$$

Q 37. L'unité du moment magnétique dans le Système International est A.m^2 .

$$\mu_B = g_e \frac{e\hbar}{4m_e} = 0,929 \cdot 10^{-23} \text{ A.m}^2 \quad \text{et} \quad \mu_N = g_p \frac{e\hbar}{4m_p} = 1,41 \cdot 10^{-26} \text{ A.m}^2$$

Q 38. Le champ magnétique ressenti par l'électron dû au proton par son moment magnétique de spin (**Document 1-** avec $\theta = \pi/2$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$) :

$$\vec{B}_{p \rightarrow e} = \frac{\mu_o \mu_N}{4\pi a_B^3} (-\vec{u}_z)$$

La transition quantique est entre les deux états :

○ État de spins parallèles. L'énergie potentielle magnétique :

$$E_{para} = -\vec{\mu}_B \cdot \vec{B}_{p \rightarrow e} = \frac{\mu_o \mu_N \mu_B}{4\pi a_B^3}$$

○ État de spins antiparallèles. L'énergie potentielle magnétique :

$$E_{anti} = -\vec{\mu}_B \cdot \vec{B}_{p \rightarrow e} = -\frac{\mu_o \mu_N \mu_B}{4\pi a_B^3}$$

L'écart énergétique entre les deux niveaux hyperfines... :

$$\Delta E_{hf, \text{classique}} = E_{para} - E_{anti} = \frac{\mu_o \mu_N \mu_B}{2\pi a_B^3}$$

Q 39.

$$\Delta E_{hf} = \frac{16}{3} \Delta E_{hf, \text{classique}} = 0,094281973 \cdot 10^{-23} \text{ J} = 588,0 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$$

La valeur trouvée est bien cohérente avec celle de $\Delta E_{hf, \text{exp}}$!!

Q 40. L'exemple de transition hyperfine intervenant dans la définition d'une unité SI est celle entre les deux niveaux hyperfines de l'état fondamental de Césium ^{133}Cs : La seconde est la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à une telle transition, soit une fréquence de 9192631770 Hz.