

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE-MODÉLISATION
CONCOURS E3A PSI 2018

Des vagues au système mécanique

- A1.** En raisonnant de manière qualitative sur les forces, déterminer la condition sur ρ_e , m et V pour que, en absence de houle, la position d'équilibre stable du pendule corresponde à $\theta = 0$.

La position d'équilibre stable du pendule correspondra à $\theta = 0$ si la valeur absolue du moment de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ par rapport à l'axe de rotation Oy est supérieure à celle du moment du poids, c'est-à-dire si $|\mathcal{M}_{Oy}(\vec{\Pi})| > |\mathcal{M}_{Oy}(m\vec{g})|$.

Comme $\vec{\Pi} = -\rho_e V \vec{g}$ et $m\vec{g}$ sont colinéaires et ont même point d'application (le bras de levier est identique pour les deux forces) alors la condition s'écrit $|\vec{\Pi}| > |m\vec{g}|$ soit $\rho_e V > m$.

- A2.** Déterminer les moments des différentes forces s'exerçant sur le solide S par rapport à l'axe Oy .

Le système est défini dans l'énoncé, il s'agit du solide S étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On peut calculer les moments en exprimant les différentes forces dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ou en utilisant la notion de bras de levier.

Trois forces et un couple s'exercent sur S :

(il y a aussi la réaction normale de l'axe de moment nul car son bras de levier est nul mais on peut considérer qu'elle est incluse dans le couple résistant au niveau de l'axe)

- le poids $m\vec{g}$ dont le moment vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{Oy}(m\vec{g}) &= (\vec{OG} \wedge m\vec{g}) \cdot \vec{u}_y \\ &= [(\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_z) \wedge (-mg\vec{u}_z)] \cdot \vec{u}_y \\ &= mgd \sin\theta\end{aligned}$$

On peut également directement utiliser le bras de levier qui vaut ici $d \sin\theta$ et justifier le signe du moment avec la règle de la main droite.

- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_e V \vec{g}$ dont le moment vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{Oy}(\vec{\Pi}) &= [\vec{OG} \wedge (-\rho_e V \vec{g})] \cdot \vec{u}_y \\ &= [(\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_z) \wedge (\rho_e V g \vec{u}_z)] \cdot \vec{u}_y \\ &= -\rho_e V g d \sin\theta\end{aligned}$$

On peut également directement utiliser le bras de levier qui vaut aussi $d \sin\theta$ et justifier le signe du moment avec la règle de la main droite.

- la force exercée par la houle $\vec{F} = \beta \cos(\omega t) \vec{u}_x$ dont le moment vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}) &= [\vec{OG} \wedge (\beta \cos(\omega t) \vec{u}_x)] \cdot \vec{u}_y \\ &= [(\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_z) \wedge (\beta \cos(\omega t) \vec{u}_x)] \cdot \vec{u}_y \\ &= d\beta \cos \theta \cos(\omega t)\end{aligned}$$

- le couple résistant $\vec{C} = -\alpha \dot{\theta} \vec{u}_y$ dont le moment associé vaut $\mathcal{M}_{Oy}(\vec{C}) = -\alpha \dot{\theta}$.

A3. Établir l'équation du mouvement du solide $\mathcal{S}$, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par θ .

Le moment cinétique du solide $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe Oy est $L_{Oy} = J\dot{\theta}$.

On utilise le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oy pour le solide $\mathcal{S}$

dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\frac{dL_{Oy}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{Oy}(\vec{f}_i)$

avec $\vec{f}_i$ les forces et couples extérieurs s'exerçant sur le solide $\mathcal{S}$.

$$J\ddot{\theta} = mgd \sin \theta - \rho_e Vgd \sin \theta + d\beta \cos \theta \cos(\omega t) - \alpha \dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J} \dot{\theta} + \frac{gd}{J} (\rho_e V - m) \sin \theta = \frac{d\beta}{J} \cos \theta \cos(\omega t)$$

A4. On se place dans l'approximation des petits angles. Linéariser alors l'équation différentielle précédente.

On mettra l'équation sous la forme $\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = f(t)$ et on précisera l'expression des différents termes λ , ω_0 et $f(t)$.

Dans l'approximation des petits angles, on a, à l'ordre 1, $\sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta \approx 1$.

On obtient donc

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J} \dot{\theta} + \frac{gd}{J} (\rho_e V - m) \theta = \frac{d\beta}{J} \cos(\omega t)$$

avec $\lambda = \frac{\alpha}{J}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{gd}{J} (\rho_e V - m)}$ et $f(t) = \frac{d\beta}{J} \cos(\omega t)$.

Remarque : on a bien $(\rho_e V - m) > 0$ d'après la réponse à la question A1.

- A5.** On se place en régime sinusoïdal forcé. On note $\underline{\theta} = \theta_0(\omega)e^{j(\omega t + \varphi)}$ et $\theta = \text{Re}(\underline{\theta})$. Déterminer l'expression de $\theta_0(\omega) = |\underline{\theta}|$.

En notation complexe, l'équation différentielle s'écrit $\ddot{\underline{\theta}} + \lambda \dot{\underline{\theta}} + \omega_0^2 \underline{\theta} = \frac{d\beta}{J} e^{j\omega t}$

soit
$$-\omega^2 \underline{\theta} + j\lambda\omega \underline{\theta} + \omega_0^2 \underline{\theta} = \frac{d\beta}{J} e^{j\omega t}$$

On a donc $\underline{\theta} = \frac{\frac{d\beta}{J}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\lambda\omega} e^{j\omega t}$ et
$$\theta_0(\omega) = |\underline{\theta}| = \frac{\frac{d\beta}{J}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\lambda\omega)^2}}.$$

- A6.** La puissance récupérée est proportionnelle à $\dot{\theta}^2$: on note $P_r(t) = \gamma \dot{\theta}^2$ la puissance récupérée instantanée. Donner l'expression de la puissance moyenne P_m récupérée en fonction de ω .

On peut utiliser la puissance moyenne complexe

$$\begin{aligned} P_m &= \langle P_r(t) \rangle = \gamma \langle \dot{\theta}^2 \rangle \\ &= \frac{\gamma}{2} \text{Re}(\dot{\underline{\theta}} \dot{\underline{\theta}}^*) = \frac{\gamma}{2} \dot{\underline{\theta}} \dot{\underline{\theta}}^* \\ &= \frac{\gamma}{2} |\dot{\underline{\theta}}|^2 = \frac{\gamma}{2} \omega^2 |\underline{\theta}|^2 = \frac{\gamma}{2} \omega^2 \theta_0^2 = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{d\beta}{J} \right)^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\lambda\omega)^2} \\ &= \frac{\gamma}{2} \left(\frac{d\beta}{J} \right)^2 \frac{1}{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \right)^2 + \lambda^2} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{d\beta}{J} \right)^2 \frac{1/\omega_0^2}{\left(\frac{\lambda}{\omega_0} \right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \end{aligned}$$

Autre méthode : faire le calcul avec $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$ donc $\dot{\theta}(t) = -\omega \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$. On a alors

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{1}{T} \int_0^T \gamma \dot{\theta}^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \gamma \omega^2 \theta_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt \\ &= \gamma \omega^2 \theta_0^2 \langle \sin^2 \rangle = \frac{\gamma}{2} \omega^2 \theta_0^2 \\ &= \frac{\gamma}{2} \left(\frac{d\beta}{J} \right)^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\lambda\omega)^2} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{d\beta}{J} \right)^2 \frac{1}{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \right)^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

A7. Tracer l'allure de P_m en fonction de ω . Pour quelle pulsation y a-t-il résonance ?

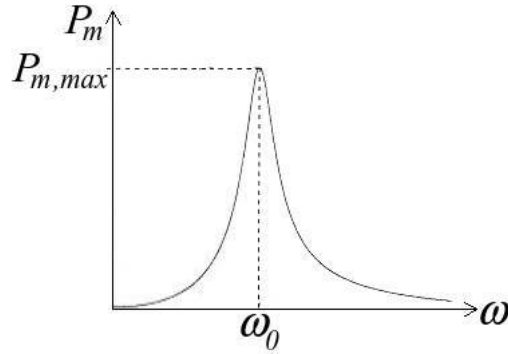
P_m est une fonction continue positive qui vérifie $\lim_{\omega \rightarrow 0} P_m = 0$ et $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} P_m = 0$.

Il y a **résonance** quand P_m est maximal. Cela se produit quand le dénominateur positif $\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + \lambda^2$ est minimal si l'on prend une forme où le **numérateur est constant**, c'est-à-dire quand $\omega = \omega_0$, le dénominateur valant alors λ^2 .

Remarque :

on peut aussi utiliser la forme ayant pour dénominateur $\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$.

Complément : $P_{m,max} = P_m(\omega_0) = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{d\beta}{J\lambda}\right)^2$.



A8. Calculer la pulsation propre ω_0 puis la période propre T_0 .

Données : accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $d = 10 \text{ m}$, $V = 1000 \text{ m}^3$, $m = 300 \text{ t}$ et on prendra $J \approx md^2$.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gd}{J}(\rho_e V - m)} = \sqrt{\frac{g}{d}\left(\frac{\rho_e V}{m} - 1\right)} = \sqrt{\frac{10}{10}\left(\frac{1000 \times 1000}{300 \times 10^3} - 1\right)} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{et } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{7}} = 4,1 \text{ s}.$$

Dans la suite de cette partie, il est possible d'utiliser une fonction écrite dans une question précédente.

Les scripts seront écrits en langage Python en se limitant aux mots suivants du langage : if, elif, else, is, while, for, in, def, return, lambda, and, or, not, True, False, None, print, input, range, enumerate, len et append.

Dans cette partie uniquement (PARTIE A), il est possible d'utiliser les tableaux du module numpy (de type ndarray). Aussi appelle-t-on tableau, dans la suite de cette partie, un objet Python de type list ou de type ndarray.

A9. Écrire en Python une fonction `amortissement(alpha, Omega, P_lev)` qui prend en arguments le coefficient d'amortissement α (alpha), la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$ (Omega) et la puissance d'écrêtage P_{lev} (P_lev), et qui renvoie la valeur $-C\dot{\theta}$ du couple résistant.

```
1 def amortissement(alpha, Omega, P_lev):
2     if alpha * Omega**2 < P_lev:
3         return -alpha * Omega
4     else: #ou elif alpha * Omega**2 >= P_lev (non nécessaire ici)
5         return -P_lev / Omega
```

Remarque : le else n'est pas forcément nécessaire dans ce cas. On aurait pu écrire

```
1 def amortissement(alpha, Omega, P_lev):
2     if alpha * Omega**2 < P_lev:
3         return -alpha * Omega
4     return -P_lev / Omega
```

A10. Écrire en Python une fonction `euler(F, t0, y0, t1, n)` prenant en arguments la fonction F , la date initiale t_0 , la condition initiale y_0 , la date finale t_1 et le nombre de divisions n de l'intervalle considéré et renvoyant le tableau contenant les valeurs $y_0, y_1, \dots, y_n$.

```
1 def euler(F, t0, y0, t1, n):
2     L = [y0] # L est la liste qui contiendra y_0, y_1, ..., y_n
3     h = (t1-t0)/n # pas de temps
4     for k in range(n):
5         L.append(L[-1] + h * F(t0+k*h, L[-1]))
6         # OU L.append(L[k] + h * F(t0+k*h, L[k]))
7     return L
```

Autre méthode : au lieu d'agrandir un tableau, on crée un tableau de taille $n + 1$ puis on le remplit.

```
1 def euler(F, t0, y0, t1, n):
2     L = np.array([None for i in range(n+1)])
3     L[0] = y0
4     h = (t1-t0)/n # pas de temps
5     for k in range(1, n+1): # attention aux indices
6         L[k] = L[k-1] + h * F(t0+(k-1)*h, L[k-1])
7     return L
```

A11. Dans le cas d'une équation différentielle de la forme $\ddot{y}(t) = G(t, \dot{y}(t), y(t))$, expliciter la fonction $F(t, Y)$.

$$\frac{dY}{dt} = \boxed{F(t, y(t)) = [\dot{y}(t), \ddot{y}(t)]} \text{ d'où } \boxed{F(t, y(t)) = [\dot{y}(t), G(t, \dot{y}(t), y(t))]}.$$

A12. Les valeurs de α et de P_{lev} sont supposées déjà initialisées comme celles de A et D .

Écrire en Python la fonction $F(t, Y)$ qui prend en arguments la date t et le tableau Y contenant l'angle θ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ($Y = [\theta, \dot{\theta}]$) à la date t et qui renvoie le tableau correspondant à $F(t, Y)$.

```
1 import numpy as np
2 from math import sin
3
4 def F(t, Y):
5     # Y[0] est \theta
6     # Y[1] est d\theta/dt
7     return np.array([Y[1], \
8                     (amortissement(alpha, Y[1], P_lev) - D*sin(Y[0]))/A])
```

Remarques :

- Les importations de `numpy` et de la fonction `sin` du module `math` n'étaient pas demandées ici.
- Il est nécessaire que $F(t, Y)$ renvoie un tableau `ndarray` si on veut pouvoir écrire `h*F(t0+(k-1)*h, L[k-1])` dans la fonction `euler`.

Production d'électricité

- B1.** Exprimer le flux $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ du champ $\vec{B}_2$ à travers la bobine 1 en fonction de K_2 , S , N_1 , i_2 et θ .

La bobine 1 étant constituée de N_1 spires identiques, on a

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = N_1 \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = N_1 \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot dS_1 \vec{n}.$$

Or $\vec{B}_2$ est uniforme sur toute la surface S_1 d'où

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = N_1 \vec{B}_2 \cdot \iint_{S_1} dS_1 \vec{n} = N_1 \vec{B}_2 \cdot S \vec{n}$$

et finalement

$$\boxed{\Phi_{2 \rightarrow 1} = N_1 B_2 \vec{u}_z \cdot S \vec{n} = N_1 K_2 i_2 S \cos(\theta)}.$$

- B2.** En déduire le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ du champ $\vec{B}_1$ à travers la bobine 2 puis l'expression de la force électromotrice $e(t)$ qui en résulte dans la bobine 2.

$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} i_1$ avec $M_{1 \rightarrow 2}$ le coefficient d'inductance mutuelle.

De même $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} i_2$ et $M_{2 \rightarrow 1} = M_{1 \rightarrow 2} = M$ d'où $M = N_1 K_2 S \cos(\theta)$.

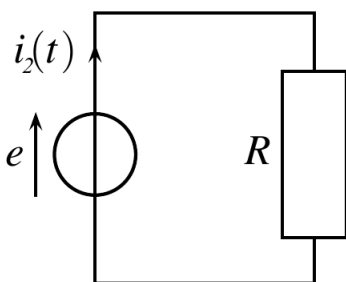
On a donc $\boxed{\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_1 K_2 i_1 S \cos(\theta)}$.

La loi de Faraday s'écrit $e = -\frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt} = -N_1 K_2 i_1 S \frac{d \cos(\theta(t))}{dt} =$ car i_1 est un courant constant.

Finalement $\boxed{e = N_1 K_2 i_1 S \dot{\theta}(t) \sin(\theta(t))}$.

- B3.** Donner le circuit électrique équivalent en indiquant la résistance R . Justifier que $e = R i_2$.

L'impédance de la bobine étant négligée, on a



La loi des mailles s'écrit alors $\boxed{e = R i_2}$.

- B4.** On modélise la bobine 1 par un dipôle magnétique. Donner l'expression du moment dipolaire associé $\vec{m}_1$. Pour la suite, on suppose que ce moment possède une norme constante m_1 .

$$\vec{m}_1 = N_1 i_1 S \vec{n}.$$

- B5.** Le couple subi par le rotor est $\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} = \vec{m}_1 \wedge \vec{B}_2(t)$. Montrer que dans l'approximation des petits angles le couple peut se mettre sous la forme $\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} = -k\theta^2 \dot{\theta} \vec{u}_y$ où k est une constante positive que l'on exprimera en fonction des données du problème. Commenter le signe négatif de cette expression.

$$\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} = \vec{m}_1 \wedge \vec{B}_2(t) = N_1 i_1 S \vec{n} \wedge K_2 i_2 \vec{u}_z$$

or $\vec{n} \wedge \vec{u}_z = -\sin \theta \vec{u}_y$ d'où

$$\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} = -N_1 K_2 i_1 S i_2 \sin \theta \vec{u}_y.$$

$$\text{De plus, } i_2 = \frac{e}{R} = \frac{N_1 K_2 i_1 S \dot{\theta} \sin(\theta)}{R}$$

$$\text{d'où } \vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{(N_1 K_2 i_1 S \sin \theta)^2 \dot{\theta}}{R} \vec{u}_y.$$

Dans l'approximation des petits angles, à l'ordre 1, $\sin \theta \approx \theta$ donc

$$\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{(N_1 K_2 i_1 S)^2 \theta^2 \dot{\theta}}{R} \vec{u}_y = -k\theta^2 \dot{\theta} \vec{u}_y$$

$$\text{avec } k = \frac{(N_1 K_2 i_1 S)^2}{R}.$$

On a un **couple résistant**. Le phénomène d'induction s'oppose au mouvement de la bobine 1 dont le mouvement est la cause de ce phénomène d'induction : c'est la **loi de Lenz**.

- B6.** On suppose que le pendule est en mouvement sinusoïdal $\theta(t) = A_0 \cos(\omega t)$. On s'intéresse au couple $\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1}(t) = \Gamma_{2 \rightarrow 1}(t) \vec{u}_y$ qui prend naissance. Donner l'expression de la réponse $\Gamma_{2 \rightarrow 1}(t)$ à l'excitation $\theta(t)$ et montrer qu'elle contient différents harmoniques. Tracer son spectre. Ces harmoniques sont-ils souhaitables ? Commenter.

$$\Gamma_{2 \rightarrow 1}(t) = -k\theta^2 \dot{\theta}.$$

$$\theta^2(t) = A_0^2 \cos^2(\omega t) \text{ et } \dot{\theta}(t) = -\omega A_0 \sin(\omega t) \text{ d'où } \boxed{\Gamma_{2 \rightarrow 1}(t) = k\omega A_0^3 \sin(\omega t) \cos^2(\omega t)}.$$

$$\text{Or } \cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$$

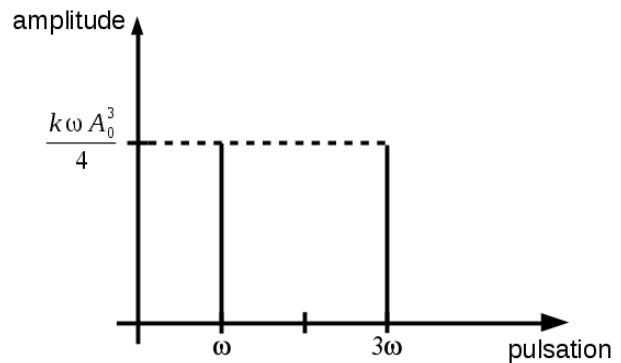
$$\text{d'où } \Gamma_{2 \rightarrow 1}(t) = \frac{k\omega A_0^3}{2} [\sin(\omega t) + \sin(\omega t) \cos(2\omega t)].$$

$$\text{Or } \sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} \text{ donc } \sin(\omega t) \cos(2\omega t) = \frac{\sin(3\omega t) - \sin(\omega t)}{2}.$$

$$\text{Finalement } \Gamma_{2 \rightarrow 1}(t) = \frac{k\omega A_0^3}{2} \left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t) - \sin(\omega t)}{2} \right].$$

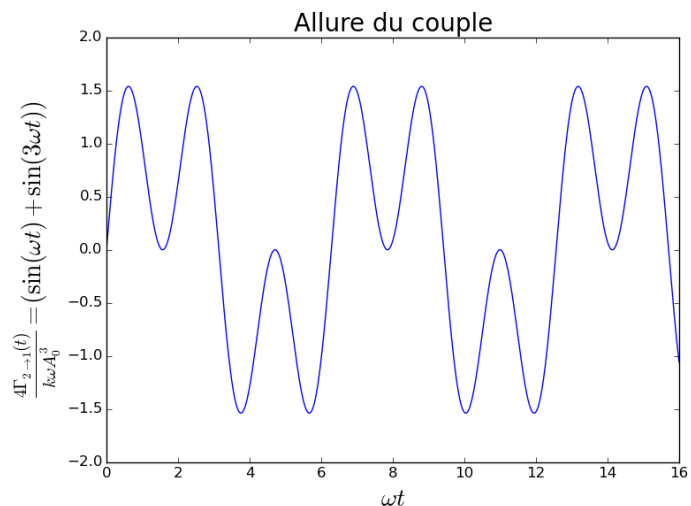
$$\boxed{\Gamma_{2 \rightarrow 1}(t) = \frac{k\omega A_0^3}{4} [\sin(\omega t) + \sin(3\omega t)]}.$$

Spectre du couple $\Gamma_{2 \rightarrow 1}(t)$:



La présence d'harmoniques va se traduire par des vibrations indésirables ; **ces harmoniques ne sont donc pas souhaitables.**

Complément :



Du vent aux vagues : modélisation statique

- C1.** Rappeler l'ordre de grandeur de la masse volumique de l'air ρ_a dans des conditions usuelles de température et pression. Donner la définition du nombre de Reynolds caractérisant un écoulement, et calculer son ordre de grandeur pour l'écoulement d'air au dessus des vagues. En déduire que l'écoulement est turbulent.

Donnée : viscosité dynamique de l'air, $\eta \approx 2 \times 10^{-5} \text{ Pl}$.

Dans les conditions usuelles de température et de pression, $\rho_a \approx 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 1 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

Remarque : sous 1 atm, à 0°C , $\rho_a \approx 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et à 20°C , $\rho_a \approx 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Le nombre de Reynolds est défini par

$$Re = \frac{\text{flux convectif de la quantité de mouvement}}{\text{flux diffusif de la quantité de mouvement}} = \frac{\|\rho_a(\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v})\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} = \frac{\text{temps caractéristique de diffusion}}{\text{temps caractéristique de convection}}.$$

$Re = \frac{\rho_a \ell_c V_c}{\eta}$ où ℓ_c est une longueur caractéristique de l'écoulement, ici $\ell_c = \lambda$ (λ vaut quelques dizaines de cm d'après l'énoncé), et V_c est une vitesse caractéristique de l'écoulement, ici $V_c = V_0$.

On prend $\lambda = 0,1 \text{ m}$. $Re = \frac{\rho_a \lambda V_0}{\eta} = \frac{1 \times 0,1 \times 3 \times 10^1}{2 \times 10^{-5}} = 1,5 \times 10^5$

On a $Re > 2 \times 10^3$ (ou $Re \gg 1$) donc l'écoulement est **turbulent**.

- C2.** La vitesse du vent est-elle plus élevée au niveau d'un creux ou d'un sommet ? Justifier.

L'écoulement étant **incompressible** et **homogène**, le **débit volumique** D_v est conservé.

Autre raisonnement pour la conservation de D_v : l'écoulement étant **stationnaire** et **homogène**, la **débit massique** D_m est conservé. Comme l'écoulement est également **incompressible**, le **débit volumique** D_v est conservé car $D_v = \frac{D_m}{\rho_e}$.

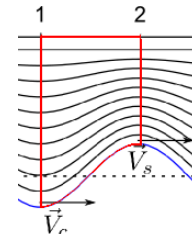
On a donc $D_v = \iint_{\text{creux}} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{sommet}} \vec{v} \cdot d\vec{S}$ d'où $D_v = V_c S_{\text{creux}} = V_s S_{\text{sommet}}$ car la vitesse est homogène et orthogonale sur toute la section au niveau des sommets et des creux (si l'on prend une section verticale de petite hauteur devant H sinon la vitesse n'est pas la même sur toute la section verticale ; voir remarque ci-après).

Or la section d'un tube de courant est plus faible au niveau d'un sommet que d'un creux :

$S_{\text{sommet}} < S_{\text{creux}}$ donc $V_s > V_c$.

Remarque : à la question C5, en considérant une variation linéaire de la vitesse, on déterminera D_1 et D_2 sur une section de hauteur non petite devant H) : $\langle V_1 \rangle = \frac{V_0 + V_c}{2}$, $S_1 = L(H + a)$, $\langle V_2 \rangle = \frac{V_0 + V_s}{2}$ et $S_2 = L(H - a)$.

Autre raisonnement : on peut également utiliser l'**espacement des lignes de courant** (car l'écoulement est incompressible) : dans un tube de courant (délimité par les sections d'abscisses 1 et 2, la surface ondulée de l'eau et la droite horizontale du haut, en rouge sur le schéma) plus les lignes de courant sont resserrées, plus la vitesse est élevée donc $V_s > V_c$.



- C3.** Rappeler la relation de Bernoulli et ses conditions de validité. L'appliquer avec soin pour déterminer une relation entre P_c , P_s , V_c , V_s , la masse volumique de l'air ρ_a , l'accélération de la pesanteur g et a . En déduire que le vent entretient les vagues.

Pour un écoulement **parfait, stationnaire, incompressible et homogène** (soumis uniquement aux forces de pression et à la pesanteur avec un axe z ascendant), la relation de Bernoulli pour l'écoulement de l'air s'écrit

$$\frac{1}{2}\rho_a V^2 + P + \rho_a g z = \text{constante}$$

le long d'une ligne de courant avec V est la vitesse de l'air et P la pression de l'air.

Rq : si l'écoulement est de plus irrotationnel, la constante est la même dans tout le fluide.

On applique cette relation le long d'une ligne de courant de l'air qui touche la surface de l'eau entre un creux et un sommet de vague.

On obtient $\frac{1}{2}\rho_a V_c^2 + P_c - \rho_a g a = \frac{1}{2}\rho_a V_s^2 + P_s + \rho_a g a$.

On a donc $P_c - P_s = \frac{1}{2}\rho_a (V_s^2 - V_c^2) + 2\rho_a g a$

Or $V_s > V_c$ d'après la réponse à la question C2 donc $V_s^2 - V_c^2 > 0$ et $P_c - P_s > 0$: le vent entretient les vagues en « poussant » les creux vers le bas et en « tirant » les sommets vers le haut.

- C4.** Déterminer $V_1(z)$ en fonction de V_c , V_0 , z , a et H . De même, déterminer $V_2(z)$ en fonction de V_s , V_0 , z , a et H .

$V_1(z)$ est une fonction affine, $V_1(z) = \alpha_1 z + \beta_1$.

De plus, $\begin{cases} V_1(-a) = V_c = -\alpha_1 a + \beta_1 \\ V_1(H) = V_0 = \alpha_1 H + \beta_1 \end{cases}$

D'où $\alpha_1 = \frac{V_0 - V_c}{H + a}$ et $\beta_1 = \frac{V_0 - V_c}{H + a} a + V_c = \frac{V_c H + V_0 a}{H + a}$

et $V_1(z) = \frac{V_0 - V_c}{H + a} (z + a) + V_c$ ou $V_1(z) = \frac{V_0 - V_c}{H + a} z + \frac{V_c H + V_0 a}{H + a}$

ou $V_1(z) = \frac{V_0 - V_c}{H + a} (z - H) + V_0$ ou $V_1(z) = \frac{z + a}{H + a} V_0 + \frac{H - z}{H + a} V_c$

$V_2(z)$ est une fonction affine, $V_2(z) = \alpha_2 z + \beta_2$.

De plus, $\begin{cases} V_2(a) = V_s = \alpha_2 a + \beta_2 \\ V_2(H) = V_0 = \alpha_2 H + \beta_2 \end{cases}$

D'où $\alpha_2 = \frac{V_0 - V_s}{H - a}$ et $\beta_2 = -\frac{V_0 - V_s}{H - a} a + V_s = \frac{V_s H - V_0 a}{H - a}$

et $V_2(z) = \frac{V_0 - V_s}{H - a} (z - a) + V_s$

ou $V_2(z) = \frac{V_0 - V_s}{H - a} z + \frac{V_s H - V_0 a}{H - a}$

ou $V_2(z) = \frac{V_0 - V_s}{H - a} (z - H) + V_0$ ou $V_2(z) = \frac{z - a}{H - a} V_0 + \frac{H - z}{H - a} V_s$

C5. En déduire les débits volumiques D_1 et D_2 à travers les sections d'abscisses 1 et 2, en fonction des grandeurs précédentes et de L .

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \iint_{S_1} V_1(z) dS = \int_{y=0}^L \int_{z=-a}^H V_1(z) dy dz = L \int_{-a}^H V_1(z) dz \\
 &= L \int_{-a}^H \left[\frac{V_0 - V_c}{H + a} (z + a) + V_c \right] dz = L \left[\frac{1}{2} \frac{V_0 - V_c}{H + a} (z + a)^2 + V_c z \right]_{-a}^H \\
 &= L \left[\frac{1}{2} \frac{V_0 - V_c}{H + a} (H + a)^2 + V_c H + V_c a \right]
 \end{aligned}$$

Et finalement $D_1 = \frac{1}{2} L (H + a) (V_0 + V_c)$.

De même,

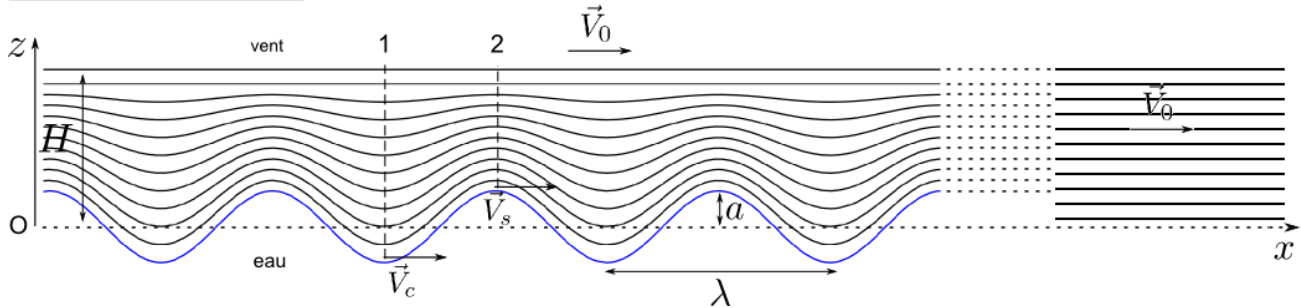
$$\begin{aligned}
 D_2 &= \iint_{S_2} V_2(z) dS = \int_{y=0}^L \int_{z=a}^H V_2(z) dy dz = L \int_a^H V_2(z) dz \\
 &= L \int_a^H \left[\frac{V_0 - V_s}{H - a} (z - a) + V_s \right] dz = L \left[\frac{1}{2} \frac{V_0 - V_s}{H - a} (z - a)^2 + V_s z \right]_a^H \\
 &= L \left[\frac{1}{2} \frac{V_0 - V_s}{H - a} (H - a)^2 + V_s H - V_s a \right]
 \end{aligned}$$

Et finalement $D_2 = \frac{1}{2} L (H - a) (V_0 + V_s)$.

C6. Justifier qu'on a $D_1 = D_2 = V_0 LH$.

Loin des vagues (à droite sur le schéma ci-dessous), les lignes de courant sont horizontales et équidistantes (la vitesse est homogène et vaut $\vec{V}_0$), le débit volumique s'écrit :
 $D_0 = \int_{y=0}^L \int_{z=0}^H V_0 dy dz = LHV_0$.

D'après la réponse à la question C2, il y a conservation du débit volumique et donc
 $D = D_1 = D_2 = V_0 LH$.



C7. En déduire V_c et V_s en fonction de V_0 . Application numérique.

$$D_1 = \frac{1}{2} L(H+a)(V_0 + V_c) = LHV_0 \text{ d'où } V_c = V_0 \frac{H-a}{H+a} = V_0 \frac{H/a-1}{H/a+1}$$

$$\text{et finalement } V_c = \frac{2}{3} V_0 = 2 \times 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$D_2 = \frac{1}{2} L(H-a)(V_0 + V_s) = LHV_0 \text{ d'où } V_s = V_0 \frac{H+a}{H-a} = V_0 \frac{H/a+1}{H/a-1}$$

$$\text{et finalement } V_s = \frac{3}{2} V_0 = 4,5 \times 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

C8. En raisonnant sur l'eau à l'équilibre, déterminer une relation entre P_c , P_s , g , a et la masse volumique de l'eau ρ_e .

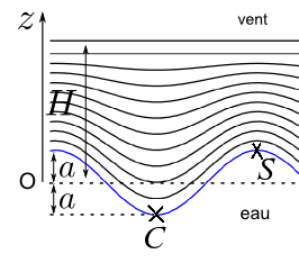
On raisonne sur l'eau à l'équilibre donc on applique la loi de

la statique des fluides $\frac{dP}{dz} = -\rho_e g$ ou $\vec{\text{grad}}(P) = \rho_e \vec{g}$.

Comme l'eau est considérée comme un fluide incompressible, on a, entre un creux C et un sommet S (voir schéma)

$\int_{P(-a)}^{P(a)} dP = -\rho_e g \int_{-a}^a dz$ avec $P(-a) = P_c$ et $P(a) = P_s$ d'où

$$P_c = P_s + 2\rho_e g a.$$



On retrouve bien $P_c > P_s$, comme à la réponse de la question C3.

C9. À partir de l'ensemble des résultats de cette partie, déterminer l'expression de l'amplitude a des vagues en fonction de V_s , V_c , g , ρ_a et ρ_e . Rappeler l'ordre de grandeur de ρ_e . Faire l'application numérique pour a .

Donnée : accélération de la pesanteur, $g = 1 \times 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

D'après C3, la relation de Bernoulli nous a donné $2\rho_a g a = P_c - P_s + \frac{1}{2}\rho_a(V_c^2 - V_s^2)$ d'où

$$a = \frac{P_c - P_s}{2\rho_a g} + \frac{1}{4g}(V_c^2 - V_s^2)$$

Or d'après C8, $\frac{P_c - P_s}{2g} = \rho_e a$ d'où $a = \frac{\rho_e}{\rho_a} a + \frac{1}{4g}(V_c^2 - V_s^2)$.

Finalement
$$a = \frac{V_s^2 - V_c^2}{4g\left(\frac{\rho_e}{\rho_a} - 1\right)}.$$

La masse volumique de l'eau vaut environ $\rho_e \approx 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Application numérique :

$$a = \frac{45^2 - (2 \times 10^1)^2}{4 \times 1 \times 10^1 \left(\frac{1,0 \times 10^3}{1} - 1\right)} \approx 4 \times 10^{-2} \text{ m} = 4 \text{ cm}.$$

Remarque : on peut exprimer a en fonction de V_0 .

En effet, si on utilise les résultats de C7, $V_c = \frac{2}{3}V_0$ et $V_s = \frac{3}{2}V_0$

d'où
$$a = \frac{V_0^2}{4g\left(\frac{\rho_e}{\rho_a} - 1\right)} \left(\frac{9}{4} - \frac{4}{9}\right) = \frac{V_0^2}{4g\left(\frac{\rho_e}{\rho_a} - 1\right)} \times \frac{65}{36} = 4 \text{ cm}.$$

C10. À proximité de la surface, la viscosité de l'air se fait sentir, ce que nous n'avons pas pris en compte. Décrire qualitativement l'action du vent sur la vague du fait de la viscosité.

La viscosité correspond à une « force de frottement » $\vec{F}$ entre les couches de fluide :

$$\vec{F} = \eta \frac{\partial V}{\partial z} S \vec{u}_x.$$

L'air « frotte » sur l'eau et engendre les vagues.

Propriétés de vagues marines

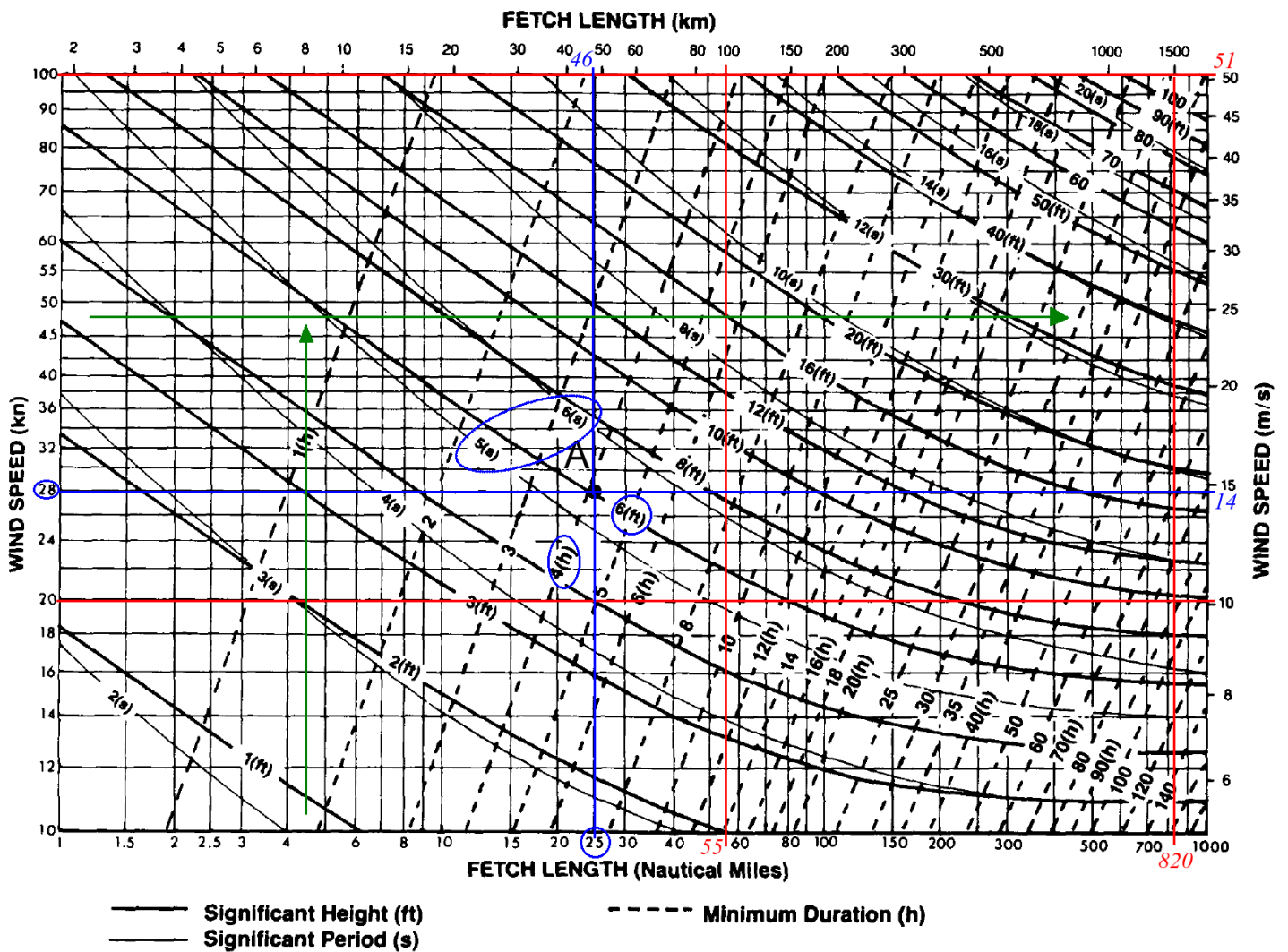


FIGURE 7 – Informations sur les vagues marines : relations entre la hauteur des vagues (« *significant height* » en ft) et leur période (« *significant period* » en s), la vitesse du vent (« *wind speed* » en kn et en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$), la durée d'exposition de la mer au vent (« *minimum duration* » en h) et le fetch (« *fetch length* » en km et en milles nautiques).

D1. Déterminer la valeur d'un mille nautique en km, et d'un nœud en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Expliquer votre démarche en annotant la FIGURE 7.

Remarque : on notera que sur la FIGURE 7 les échelles verticale et horizontale ne sont pas linéaires. On peut par exemple utiliser les correspondances suivantes (cf. FIGURE 7, lignes verticales en rouge) :

1500 km $\leftrightarrow$ 820 milles donc $1 \text{ mille} \approx \frac{1500}{820} \approx 1,83 \times 10^3 \text{ m} \approx 1,8 \times 10^3 \text{ m}$.

ou 100 km $\leftrightarrow$ 55 milles donc $1 \text{ mille} \approx \frac{100}{55} \approx 1,82 \times 10^3 \text{ m} \approx 1,8 \times 10^3 \text{ m}$.

Complément : 1 mille nautique (*nautical mile* en anglais) ou mille marin (ou mille marin international) vaut par convention 1852 m. Historiquement 1 mille marin correspond à la longueur d'un arc à la surface de la Terre correspondant à une minute d'angle en latitude. Sa valeur actuelle a été fixée en 1929 par la première conférence hydrographique internationale extraordinaire de Monaco. Le mille nautique ne doit pas être confondu avec le mille terrestre (*mile* en anglais ; l'orthographe est souvent reprise en français) qui correspond à 1609,344 m soit 1760 yards.

Pour déterminer la valeur d'un nœud, on peut :

- utiliser la correspondance $1 \text{ kn} = 1 \text{ mille} \cdot \text{h}^{-1}$.

$$1 \text{ kn} \approx \frac{1,83 \times 10^3}{3600} \approx 0,51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{ou} \quad 1 \text{ kn} \approx \frac{1,82 \times 10^3}{3600} \approx 0,51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- utiliser des correspondances lues sur la FIGURE 7 (lignes horizontales en rouge), par exemple, 100 kn $\leftrightarrow$ 51 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $1 \text{ kn} \approx \frac{51}{100} \approx 0,51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

ou 20 kn $\leftrightarrow$ 10 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $1 \text{ kn} \approx \frac{10}{20} \approx 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Complément : 1 nœud correspond à 1 mille marin par heure soit 1852 m par heure ou $0,514 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Remarque : on peut également déterminer la valeur d'un nœud puis en déduire la valeur d'un mille nautique avec la relation $1 \text{ kn} = 1 \text{ mille} \cdot \text{h}^{-1}$.

D2. Identifier les valeurs associées au point A présent sur la FIGURE 7 : hauteur a de vague, vitesse V_0 du vent, *fetch* F , durée τ_e d'exposition de la mer au vent, période temporelle T des vagues. Comparer la période temporelle T des vagues avec la période propre T_0 du système de la question A8.

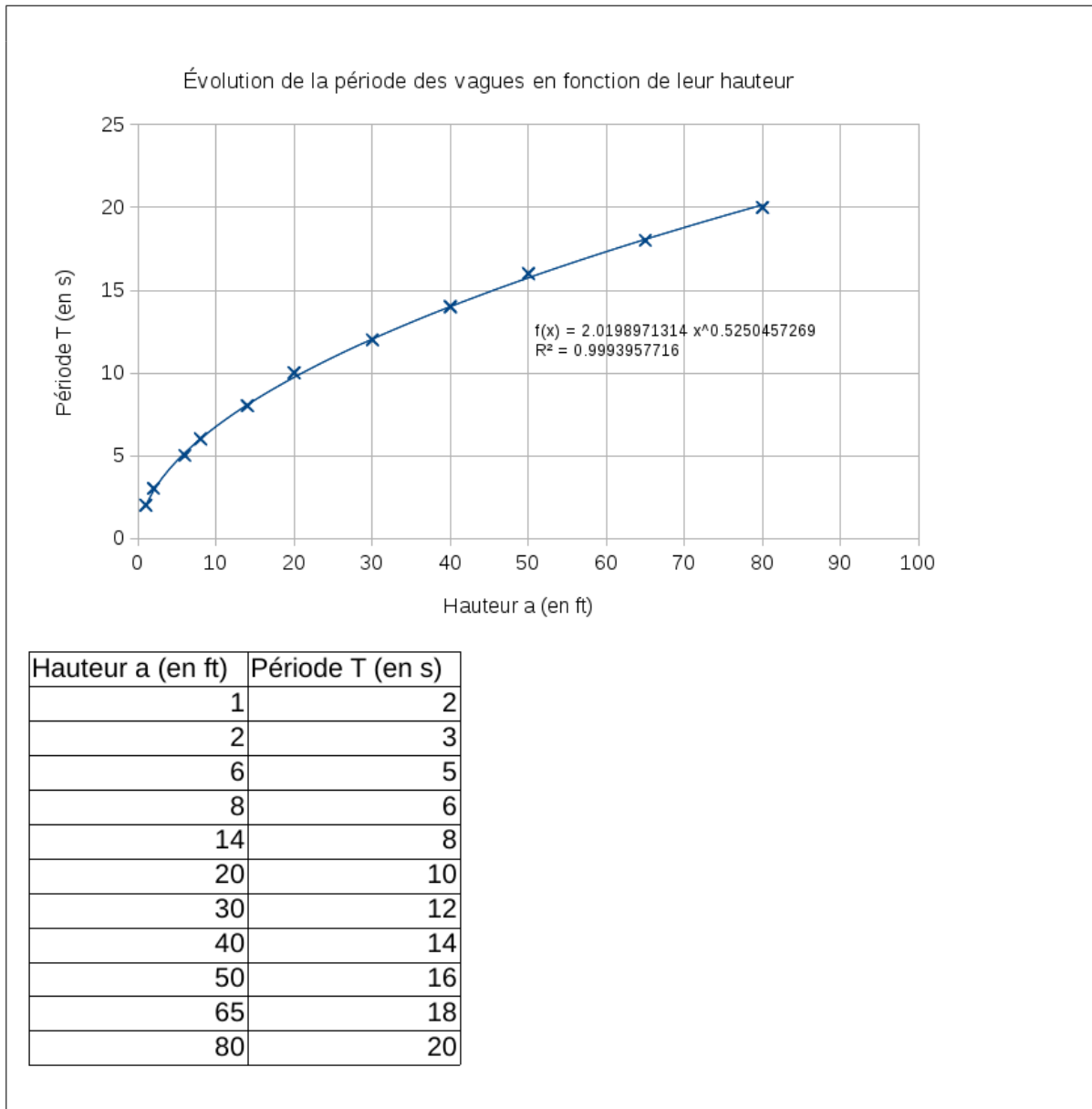
- hauteur de vague $a = 6 \text{ ft} = 6 \times 30,5 = 183 \text{ cm} \approx 1,8 \text{ m}$;
- vitesse du vent $V_0 = 28 \text{ kn} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$;
- *fetch* $F = 25 \text{ milles} = 46 \text{ km}$;
- durée d'exposition de la mer au vent $\tau_e = 4 \text{ h}$;
- période temporelle des vagues comprise $T \approx 5,2 \text{ s}$ et $T \approx 5,5 \text{ s}$. Cette période est du même ordre de grandeur que celle de T_0 trouvée à la question A8 ($T_0 = 4,1 \text{ s}$).

D3. La hauteur de vague augmente-elle ou diminue-t-elle en fonction de la vitesse du vent ? en fonction du *fetch* ? Justifier notamment en annotant la FIGURE 7.

Lorsque la vitesse du vent augmente (le *fetch* restant constant), on se déplace verticalement sur la FIGURE 7 (flèche verticale verte), on voit donc que la hauteur de vague augmente.

Lorsque le *fetch* augmente (la vitesse du vent restant constante), on se déplace horizontalement sur la FIGURE 7 (flèche horizontale verte), on voit donc que la hauteur de vague augmente.

D4. Tracer l'évolution de la période des vagues en fonction de leur hauteur.



D5. Pour une vague, donner l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de sa période T et de g . La calculer pour le point A précédemment étudié.

La longueur d'onde vaut $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

D'après la relation de dispersion $k = \frac{\omega^2}{g}$ or $\omega = \frac{2\pi}{T}$ d'où $k = \frac{4\pi^2}{gT^2}$.

Et finalement $\lambda = \frac{gT^2}{2\pi}$.

Application numérique pour le point A :

$\lambda = \frac{10 \times 5,2^2}{2\pi} \approx 43\text{m}$ ou $\lambda = \frac{10 \times 5,5^2}{2\pi} \approx 48\text{m}$

D6. Définir la vitesse de phase, et l'exprimer en fonction de T . La calculer au point A.

La vitesse de phase v_φ est définie par $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \times \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T}$ d'où $v_\varphi = \frac{gT}{2\pi}$.

La vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation d'une onde plane progressive harmonique (OPPH). Une OPPH n'est pas un « objet réel » ; une onde réelle est une superposition d'OPPH (un paquet d'ondes).

Application numérique pour le point A :

$$v_\varphi = \frac{10 \times 5,2}{2\pi} \approx 8,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ ou } v_\varphi = \frac{10 \times 5,5}{2\pi} \approx 8,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

D7. Définir la vitesse de groupe et la calculer au point A. Comparer à la vitesse de phase. Une série de vagues se déplace-t-elle plus vite ou plus lentement que les vagues individuelles qui la composent ?

La vitesse de groupe v_g est définie par $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Or $\omega^2 = gk$ donc $2\omega d\omega = g dk$

donc $v_g = \frac{g}{2\omega}$ d'où $v_g = \frac{gT}{4\pi} = \frac{v_\varphi}{2} < v_\varphi$.

Application numérique pour le point A :

$$v_g = \frac{10 \times 5,2}{4\pi} \approx 4,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ ou } v_g = \frac{10 \times 5,3}{4\pi} \approx 4,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l'enveloppe d'un paquet d'ondes. Il s'agit de la vitesse de propagation de l'information.

Ici $v_g = \frac{v_\varphi}{2} < v_\varphi$ donc une série de vagues (un paquet d'ondes) se déplace **plus lentement** que les vagues individuelles qui la composent.

D8. À partir des réponses aux questions précédentes, montrer que les vagues plus hautes sont aussi plus espacées et plus rapides.

D'après D4, T augmente quand a augmente.

D'après D5, $\lambda = \frac{gT^2}{2\pi}$ donc si la hauteur a des vagues augmente, T augmente et la longueur d'onde λ augmente : les vagues sont plus espacées.

D'après D6, $v_\varphi = \frac{gT}{2\pi}$ (ou d'après D7, $v_g = \frac{gT}{4\pi}$) donc si la hauteur a des vagues augmente, T augmente et la vitesse de phase v_φ (ou la vitesse de groupe v_g) augmente : les vagues sont plus rapides.

D9. Par analyse dimensionnelle, proposer une expression de son énergie par unité de surface en fonction de g , de l'amplitude a de la vague et de la masse volumique de l'eau ρ_e .

On note $\mathcal{E}_{surf}$ l'énergie surfacique.

Par analyse dimensionnelle,

$$[\mathcal{E}_{surf}] = M \cdot T^{-2},$$

$$[g] = L \cdot T^{-2},$$

$$[a] = L$$

$$\text{et } [\rho_e] = M \cdot L^{-3}.$$

$$\mathcal{E}_{surf} = g^\alpha a^\beta \rho_e^\gamma \text{ d'où } M \cdot T^{-2} = (L \cdot T^{-2})^\alpha L^\beta (M \cdot L^{-3})^\gamma = M^\gamma \cdot L^{\alpha+\beta-3\gamma} \cdot T^{-2\alpha}$$

$$\text{On a donc le système suivant } \begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha + \beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3\gamma - \alpha = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

On peut bien sûr faire le même raisonnement avec les unités de base du système international,

$$[\mathcal{E}_{surf}] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$[g] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$[a] = \text{m}$$

$$\text{et } [\rho_e] = \text{kg} \cdot \text{L}^{-3}.$$

$$\mathcal{E}_{surf} = g^\alpha a^\beta \rho_e^\gamma \text{ d'où } \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} = (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^\alpha \text{m}^\beta (\text{kg} \cdot \text{L}^{-3})^\gamma = \text{kg}^\gamma \cdot \text{m}^{\alpha+\beta-3\gamma} \cdot \text{s}^{-2\alpha}$$

et on retrouve le même système que précédemment.

Finalement $\boxed{\mathcal{E}_{surf} = \rho_e g a^2}$

D10. En multipliant cette énergie par la longueur d'onde λ et par la longueur de la côte, on obtient un ordre de grandeur de l'énergie apportée sur la côte par une vague. En déduire un ordre de grandeur de la puissance moyenne apportée par les vagues sur la côte atlantique de la France. On prendra une période de 7 s et une amplitude de 0,5 m. Comparer le résultat obtenu aux valeurs de la FIGURE 1 et à la puissance d'une centrale nucléaire et commenter.

L'énergie apportée $\mathcal{E}_{vague}$ sur la côte par une vague vaut $\mathcal{E}_{vague} = \mathcal{E}_{surf} \lambda L_{côte}$ avec $L_{côte}$ la longueur de la côte.

La puissance moyenne $\mathcal{P}_m$ apportée par les vagues sur la côte atlantique de la France vaut $\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{E}_{vague}}{T} = \frac{\mathcal{E}_{surf} \lambda L_{côte}}{T} = \frac{\rho_e g a^2 \lambda L_{côte}}{T}$ avec T la période des vagues.

Or d'après D5, on a $\lambda = \frac{g T^2}{2\pi}$ d'où $\mathcal{P}_m = \frac{\rho_e g^2 T a^2 L_{côte}}{2\pi}$.

La longueur du littoral atlantique français vaut environ $L_{côte} \approx 2400 \text{ km}$.

Application numérique : $\mathcal{P}_m = \frac{1,0 \times 10^3 \times 10^2 \times 7 \times 0,5^2 \times 2400 \times 10^3}{2\pi} \approx 7 \times 10^1 \text{ GW}$.

Sur la FIGURE 1, ce sont des puissance par mètre de front de vague qui sont indiquées. Pour la côte atlantique on lit la valeur de $44 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-1}$.

La puissance moyenne par mètre de front de vague vaut

$$\frac{\mathcal{P}_m}{L_{côte}} = \frac{\rho_e g^2 T a^2}{2\pi} = \frac{1,0 \times 10^3 \times 10^2 \times 7 \times 0,5^2}{2\pi} \approx 28 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-1} \approx 3 \times 10^1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On trouve bien une valeur ($3 \times 10^1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-1}$) du même ordre de grandeur que sur la FIGURE 1 ($44 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-1}$).

La puissance d'un réacteur de centrale nucléaire est de l'ordre de 1 GW (une centrale nucléaire comporte plusieurs réacteurs).

Complément :

$\mathcal{P}_m$ correspond donc environ à la puissance de 70 réacteurs de centrale nucléaire.

La France possède actuellement 58 réacteurs en fonctionnement. Cette puissance apparaît donc relativement importante et il est intéressant de chercher à l'exploiter. Cependant elle n'est pas constante dans le temps et il n'est pas possible d'équiper tout le littoral atlantique de dispositif pour la récupérer. Il faut également prendre en compte le rendement de tels dispositifs.

Afin de répondre à une question, il est possible d'utiliser une fonction écrite dans une question précédente.

Dans la suite de l'énoncé, on appelle tableau un objet Python de type list.

Pour les questions suivantes, on n'utilisera pas de fonctions ou de méthodes de Python ou de l'un de ses modules, notamment du module numpy.

Les scripts seront écrits en langage Python en se limitant aux mots suivants du langage : if, elif, else, is, while, for, in, def, return, lambda, and, or, not, True, False, None, print, input, range, enumerate, len et append.

D11. Écrire en Python une fonction `moyenne(T)` prenant comme argument un tableau `T` et retournant la moyenne des valeurs du tableau `T`.

```
1 def moyenne(T):
2     S = 0
3     n = len(T)
4     for i in range(n):
5         S = S + T[i]
6     return S/n
```

```
def moyenne(T):
    S = 0
    for i in T:
        S += i
    return S/len(T)
```

D12. Écrire en Python une fonction `tri(T)` prenant comme argument un tableau `T` et retournant ce même tableau `T` trié en utilisant l'algorithme de tri par insertion.

```
1 def tri(T):
2     for i in range(1, len(T)):
3         tmp = T[i]
4         j = i
5         while j > 0 and tmp < T[j-1]:
6             T[j] = T[j-1]
7             j = j-1
8         T[j] = tmp
9     return T
```

Remarque : l'instruction `return T` n'est pas nécessaire (mais demandé ici dans l'énoncé). En effet, le tableau `T` sera modifiée par la fonction `tri` même s'il n'est pas renvoyé par celle-ci.

Autre possibilité : plus coûteuse pour le nombre d'échanges mais qui sera peut-être proposée par certains candidats.

```
1 def tri(T):
2     for i in range(1, len(T)):
3         j = i
4         while j > 0 and T[j] < T[j-1]:
5             T[j], T[j-1] = T[j-1], T[j]
6             j = j-1
7     return T
```

D13. Déterminer pour le tri par insertion la complexité temporelle dans le meilleur et dans le pire cas.

On note $N = \text{len}(T)$.

Dans le meilleur des cas, le tableau est déjà trié. On effectue donc $N-1$ itérations de la boucle `for` avec un nombre constant d'opérations pour chaque itération (3 affectations et 2 tests pour la première version ; 1 affectation et 2 tests pour la deuxième version) que l'on note K .

Le nombre d'opérations est donc $\sum_{i=1}^{N-1} A = A(N-1) = \boxed{O(N)}$. La complexité temporelle du tri par insertion est **linéaire dans le meilleur des cas**.

Dans le pire des cas, le tableau est trié dans l'ordre décroissant. On effectue donc $N-1$ itérations de la boucle `for` avec i itérations de la boucle `while` qui comprend 2 affectations. Le nombre d'opérations est donc $\sum_{i=1}^{N-1} 2i = N(N-1) = \boxed{O(N^2)}$. La complexité temporelle du tri par insertion est **quadratique dans le pire des cas**.

Remarque : la complexité en mémoire (non demandée ici) est constante car le tri par insertion trie le tableau sur place pour la version proposée. Si on veut conserver le tableau initial, il faut en faire une copie et on utilise deux fois plus de mémoire.

D14. Écrire en Python une fonction `mediane(T)` prenant en argument un tableau T non trié et renvoyant la médiane de ce tableau. Quelle est la complexité temporelle de cette fonction ?

```
1 def mediane(T):
2     return tri(T)[(len(T)-1)//2]
```

Autre possibilité :

```
1 def mediane(T):
2     n = len(T)
3     T = tri(T) # on pourrait seulement écrire tri(T) car T est
4                 modifié dans tous les cas (même si tri ne renvoyait pas T)
5     if n%2 == 0:
6         return T[int(n/2)-1]
7         # ou T[n//2-1] ou T[(n-1)//2] ou T[int((n-1)/2)]
8     else:
9         return T[int((n-1)/2)] # ou T[(n-1)//2] ou T[n//2]
```

La complexité de la fonction moyenne est la **même** que celle de la fonction `tri`.

D15. Écrire une requête en langage SQL qui récupère le nom des sites et la puissance moyenne sur une année pour les sites dont la puissance moyenne sur une année a été supérieure à 5 kW/m en 2014.

```
SELECT site, p_annee FROM vagues WHERE p_annee > 5 AND annee = 2014
```

Autre possibilité :

```
SELECT site, p_annee FROM vagues WHERE p_annee > 5
```

```
INTERSECT SELECT site, p_annee FROM vagues WHERE annee = 2014
```

mais INTERSECT s'emploie généralement pour des requêtes provenant de tables distinctes.

Autre possibilité :

```
SELECT site, p_annee FROM (SELECT site, p_annee FROM vagues  
WHERE annee = 2014) WHERE p_annee > 5
```

Autre possibilité :

```
SELECT site, p_annee FROM vagues WHERE annee IS 2014 AND p_annee > 5
```

Autre possibilité :

```
SELECT site, p_annee FROM vagues WHERE annee = 2014 GROUP BY site  
HAVING p_annee > 5
```

D16. Écrire une requête en langage SQL qui récupère la valeur maximale de la puissance moyenne sur une année en 2014, puis écrire une autre requête qui récupère le nom du site correspondant.

Pour avoir la valeur maximale :

```
SELECT MAX(p_annee) FROM vagues WHERE annee = 2014
```

OU

```
SELECT p_annee FROM vagues WHERE annee = 2014 ORDER BY p_annee DESC LIMIT 1
```

Puis, pour récupérer le nom du site correspondant

```
SELECT site FROM vagues WHERE p_annee = (SELECT MAX(p_annee)  
FROM vagues WHERE annee = 2014) AND annee = 2014
```

Variantes : pour la 2^e requête

```
SELECT site FROM vagues WHERE p_annee
```

```
IN (SELECT MAX(p_annee) FROM vagues WHERE annee = 2014) AND annee = 2014
```

OU

```
SELECT site FROM vagues WHERE annee = 2014 ORDER BY p_annee DESC LIMIT 1
```

Si l'on souhaite aussi récupérer la puissance moyenne avec le nom du site (ce qui n'était pas explicitement demandé dans l'énoncé)

```
SELECT site, p_annee FROM vagues  
WHERE p_annee = (SELECT MAX(p_annee) FROM vagues WHERE annee = 2014)  
AND annee = 2014
```

Ou simplement :

```
SELECT site, MAX(p_annee) FROM vagues WHERE p_annee = 2014
```

Variante :

```
SELECT MAX(p_annee) FROM vagues GROUP BY annee HAVING annee = 2014
```

puis

```
SELECT site FROM vagues GROUP BY annee HAVING annee = 2014 AND MAX(p_annee)
```

Remarque : HAVING nécessite GROUP BY.

D17. Écrire une requête en langage SQL qui récupère les noms des sites et les moyennes sur les années de mesure des puissances totales récupérables par site. En langage SQL, la moyenne se calcule automatiquement avec la fonction AVG(expr).

```
SELECT geographie.site, AVG(p_annee*longueur) AS moyenne_p_totale  
FROM vagues JOIN geographie ON vagues.site = geographie.site  
GROUP BY geographie.site
```

Fin de l'épreuve