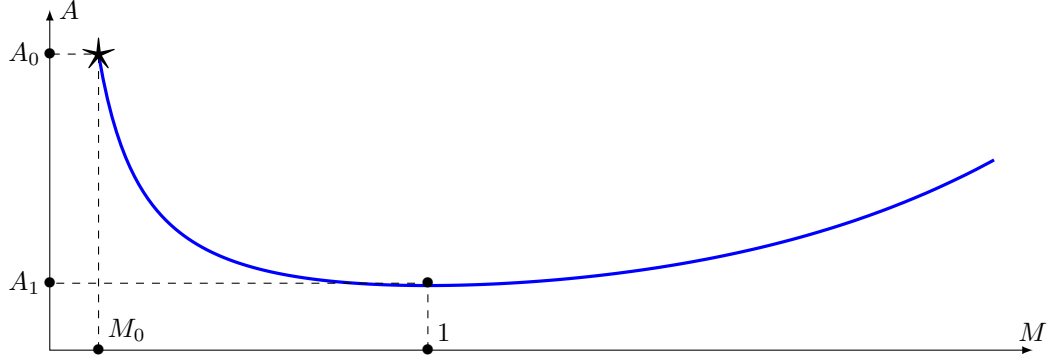
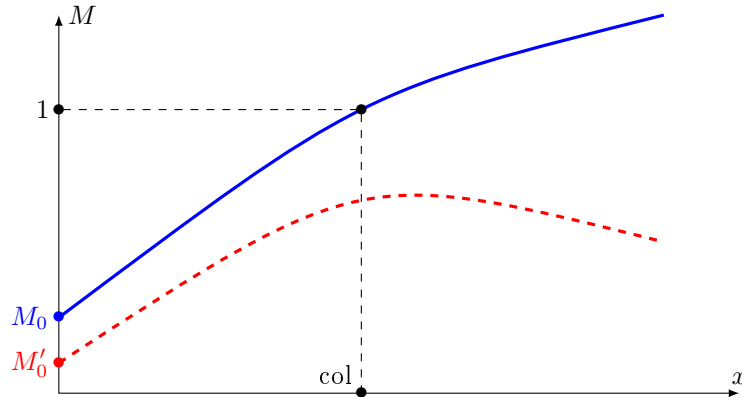


1. L'expression proposée est homogène, $[F] = M \cdot T^{-1} \times L \cdot T^{-1} = M \cdot L \cdot T^{-2}$, proportionnelle au débit et à la vitesse d'éjection, et de sens contraire à celle-ci... c'est donc bien une force de poussée par réaction.
2. Pour un système classique à énergie variant continûment de manière quadratique en fonction des trois degrés de liberté v_x , v_y et v_z indépendants, le théorème d'équipartition impose une énergie moyenne par particule $\frac{1}{2}k_B T$ par degré de liberté, où $k_B = R/\mathcal{N}_A$ est la constante de Boltzmann. L'expression de l'énergie cinétique moyenne est donc $\langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{1}{2}m \langle \vec{v}^2 \rangle$ où $m = \mathcal{M}_{\text{H}_2\text{O}}/\mathcal{N}_A$ est la masse d'une molécule d'eau. Finalement, $\frac{1}{2}\mathcal{M}_{\text{H}_2\text{O}} \langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3}{2}RT$ donc $\langle \vec{v}^2 \rangle = 3rT$.
3. Le débit massique associé au passage d'un fluide de masse volumique ρ à la vitesse $\vec{v}$ est le flux de $\rho\vec{v}$ donc $D = \rho v_{\text{th}} A_0$; cette force vaut donc $F_{\text{th}} = \rho v_{\text{th}}^2 A_0 = 3\rho rT A_0$ mais l'équation d'état des gaz parfaits $PM = \rho RT$ s'écrit ici $\rho rT = P$ d'où, dans le plan $x = 0$, $F_{\text{th}} = 3P_0 A_0$.
4. On trouve $F_{\text{th}} = 6,6 \cdot 10^6 \text{ N}$, valeur qu'on doit comparer au poids initial de la fusée $m_{F0}g \simeq 8 \cdot 10^6 \text{ N}$: la fusée ne peut pas décoller avec ce seul moteur.
5. Dans le cas adiabatique et réversible, P/ρ^γ est une constante (équation de Laplace) donc $\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$ qui impose $c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$ ou, compte tenu de l'équation d'état déjà écrite $P = \rho rT$, $c^2 = \gamma rT$.
6. L'expression du débit $D = \rho_0 v_0 A_0$ avec $\rho_0 = P_0/rT_0$ impose $v_0 = \frac{DrT_0}{A_0 P_0}$ soit $v_0 = 1,9 \cdot 10^2 \text{ m/s}$.
7. On a ici $c_0 = \sqrt{\gamma rT_0} = 1,45 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ donc $M_0 = 0,13$: c'est un écoulement subsonique.
8. Le produit $\rho v A = D$ s'identifie, comme on l'a vu, au débit massique à travers une section droite de la tuyère. Il reste uniforme le long de l'écoulement car celui-ci est stationnaire : la relation générale de conservation de la matière $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ prend donc ici la forme $\text{div} \vec{j} = 0$ où $\vec{j} = \rho \vec{v}$ est donc un vecteur à flux conservatif et c'est ce flux qui s'identifie à D . On a donc bien $D = \rho v A = \text{cte}$.
9. On en déduit $\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$ tandis que le caractère isentropique de l'écoulement impose, comme on l'a vu, $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{P} = -\frac{\rho}{\gamma} v \frac{dv}{P}$ d'après la loi dynamique admise. Finalement, $\frac{dA}{A} = -\frac{dv}{v} + \frac{\rho}{\gamma P} v^2 \frac{dv}{v}$ où l'équation d'état impose encore $\frac{\rho}{\gamma P} = \frac{1}{\gamma rT} = \frac{1}{c^2}$, d'où la relation de Hugoniot, $\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dv}{v}$.
10. On veut accélérer le gaz donc obtenir $dv > 0$ ce qui, pour un écoulement subsonique, impose $dA < 0$ donc le cas (a) (tuyère divergente) ne convient pas puisque v diminue donc M aussi *a priori* au début de l'écoulement.
11. Dans le cas de la tuyère de Laval, la vitesse augmente d'abord puis ensuite $dA > 0$ donc la vitesse diminue si l'écoulement reste subsonique; elle peut cependant continuer à augmenter si l'écoulement devient supersonique à partir du col. Pour obtenir l'amorçage de la tuyère, il faut donc obtenir $M = 1$ au col.
12. La tuyère divergente peut être utilisée si, dès la sortie de la chambre de combustion, le gaz éjecté est déjà supersonique (combustion à très haute température).
13. Puisque $M^2 = \frac{v^2}{\gamma rT}$ on peut écrire $\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T}$.
14. Dans le cas adiabatique et réversible, la relation de Laplace $P/\rho^\gamma = \text{cte}$ peut être remplacée par $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}'$ donc $(1-\gamma) \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0$ donc aussi $\frac{dv}{v} = -\frac{P}{\rho v^2} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$ ou, en utilisant encore l'équation d'état $P = \rho rT$, $\frac{dv}{v} = -\frac{rT}{v^2} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$ qu'on écrit finalement $\frac{dv}{v} = -\frac{1}{M^2(\gamma-1)} \frac{dT}{T}$.
15. Puisque $\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = \frac{dv}{v} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]$ on peut recopier la relation de Hugoniot sous la forme $\frac{dA}{A} = \frac{M^2-1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$ qui prend la forme demandée en posant $\alpha = \frac{\gamma-1}{2} > 0$.
16. La réduction au dénominateur commun impose $M^2 - 1 = C_1 + C_2 M + (C_1 \alpha + C_3) M^2$ qui doit être vrai pour tout M donc $C_1 = -1$, $C_2 = 0$ et $C_3 = 1 + \alpha$.

17. On a donc $\frac{dA}{A} = \left[\frac{1+\alpha}{2\alpha} \frac{2\alpha M}{1+\alpha M^2} - \frac{1}{M} \right] dM$ qui s'intègre en $\ln(A) = \frac{1+\alpha}{2\alpha} \ln(1+\alpha M^2) - \ln(M) + \text{cte}$ qu'on écrit encore $A \frac{M}{(1+\alpha M^2)^\beta} = \text{cte}'$ qui prend la forme demandée si on pose $f(M) = \frac{M}{(1+\alpha M^2)^\beta}$.
18. Comme α et β sont positifs, $f(M)$ est partout définie et dérivable et admet un extremum si et seulement si $(1+\alpha M^2)^\beta = 2\alpha\beta M^2(1+\alpha M^2)^{\beta-1}$ qui s'écrit aussi $2\alpha\beta M^2 = 1+\alpha M^2$ ou $M^2 = \frac{1}{\alpha(2\beta-1)}$ ou, après simplification, $M_{\text{ext}} = 1$.
19. Pour $M \rightarrow 1$, la fonction $f(M) \sim M$ est d'abord croissante, puis décroissante au-delà de $M = 1$ avec, pour $M \rightarrow \infty$, le comportement $f(M) \sim \alpha^{-\beta} M^{-1/\alpha}$, d'où le tracé de $A = \text{Cte}/f(M)$:

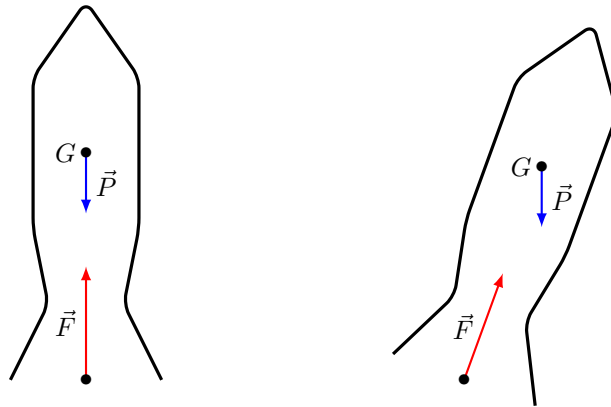


20. Si on suppose $A_{\text{col}} > A_1$, alors dans la première partie (convergente) de la tuyère, A diminue, M augmente jusqu'à une valeur $M_{\text{col}} < 1$: la tuyère reste subsonique. À partir de ce moment, A augmente, donc M diminue et la tuyère reste partout subsonique.
- Si on suppose maintenant $A_{\text{col}} = A_1$, alors là aussi A diminue et M augmente jusqu'à une valeur $M = 1$ atteinte au col, à partir de quoi A augmente, M peut continuer à augmenter et la tuyère est supersonique en sortie. Notons que $A_{\text{col}} < A_1$ n'est pas compatible avec le type d'écoulement étudié ici.
21. Dans le cas amorcé, M augmente de manière monotone et passe par la valeur 1 au col (tracé en traits pleins ci-dessous).



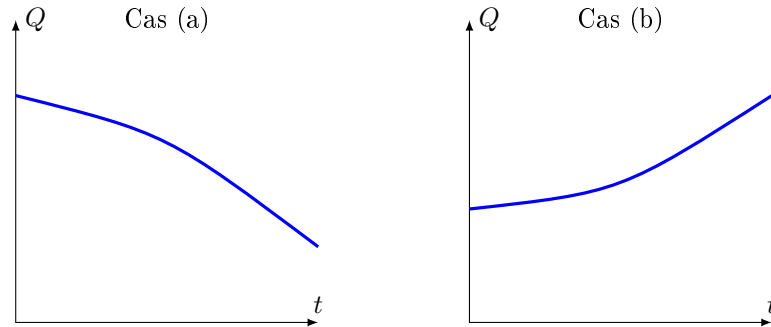
22. Dans ce cas non amorcé, M augmente de manière monotone jusqu'à une valeur inférieure à 1 au col puis rediminue (tracé en pointillés ci-dessus).
23. On a montré que $A_0 f(M_0) = A_c f(M_c)$ avec $M_c = 1$ pour une tuyère amorcée donc $k_{c0} = \frac{f(M_0)}{f(1)}$ qu'on écrit encore $k_c = M_0 \left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha M_0^2} \right)^\beta$. On vérifie bien sûr que $k_{c0} < 1$ comme l'impose la géométrie de la tuyère de Laval, mais aussi que k_{c0} est une fonction croissante de M_0 : plus le gaz est éjecté à haute vitesse (relative à c_0) plus on peut utiliser un col large.
24. Puisque $M_0 = 0,13$ on lit directement sur la courbe proposée $A_0/A_c \simeq 5$ donc $k_{c0} \simeq 0,2$.
25. Le comportement ultérieur du gaz après la sortie est caractérisé par un flux qui s'élargit dans le cas sous-détendu, $P_s > P_e$, du fait de la différence des forces de pression entre le jet de gaz éjecté et l'air qui l'environne : c'est le cas (c). Au contraire dans le cas sur-détendu, $P_s < P_e$ et l'écoulement en sortie est rabattu vers l'axe de la tuyère, cas (b). Dans les deux cas on peut s'attendre à une perte de poussée sur des composantes radiales importantes sont présentes dans le flux de sortie. Le cas adapté est *a priori* idéal, cas (a).

26. La relation $\frac{dv}{v} = -\frac{1}{M^2(\gamma-1)} \frac{dT}{T}$ s'écrit effectivement $\boxed{\frac{\gamma r}{\gamma-1} dT + v dv = 0}$ puisque $M^2 = v^2/\gamma r T$. On l'identifie aussi sous la forme $\boxed{d\left[\frac{v^2}{2} + h\right] = 0}$, expression du premier principe pour un écoulement stationnaire, à condition de remarquer l'expression de l'enthalpie massique $dh = c_p dT$ où la capacité thermique massique d'un gaz parfait est $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \frac{1}{\mathcal{M}_{\text{H}_2\text{O}}}$ donc $c_p = \frac{\gamma r}{\gamma-1}$. On a donc traduit ici la conservation de la somme de l'enthalpie et de l'énergie cinétique massiques du gaz en écoulement dans la tuyère.
27. $\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T}$ se combine avec $\frac{dv}{v} = -\frac{1}{M^2(\gamma-1)} \frac{dT}{T}$ pour donner $\frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \left[1 + \frac{1}{M^2\alpha}\right] = 0$ qu'on recopie $\frac{dT}{T} + 2M\alpha \frac{dM}{1+\alpha M^2} = 0$ qui s'intègre immédiatement en $\boxed{T(1+\alpha M^2) = \text{Cte}}$.
28. On a déjà établi que le caractère isentropique de l'écoulement imposait $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}'$; on peut donc affirmer sans autre calcul que $\boxed{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (1+\alpha M^2) = \text{Cte}'}$.
29. On écrit cette relation de l'entrée à la sortie de la tuyère, $P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (1+\alpha M_0^2) = P_e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (1+\alpha M_s^2)$ d'où on déduit la relation exacte $\boxed{M_s^2 = \frac{1}{\alpha} \left[(1+\alpha M_0^2) \left(\frac{P_0}{P_e}\right)^{1-1/\gamma} - 1 \right]}$ avec, numériquement, $\alpha M_0^2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \ll 1$ et $\frac{P_0}{P_e} = 110$ donc $\left(\frac{P_0}{P_e}\right)^{1-1/\gamma} \simeq 3$: on doit donc écrire $\boxed{M_s^2 \simeq \frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_0}{P_e}\right)^{1-1/\gamma} - 1 \right]}$.
30. On lit $P_e/P_0 \simeq 9 \cdot 10^{-3}$ donc $\boxed{M_s \simeq 3,7}$.
31. On lit $M = 3,7$ donc $\boxed{k_{sc} = \frac{A}{A_c} \simeq 10}$.
32. On lit enfin $M = 3,7$ donc $\frac{T}{T_0} = 0,35$, $T_s = 1200 \text{ K}$ donc $c_s = 860 \text{ m/s}$ donc enfin $v_s = M_s c_s = 3,1 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ d'où on déduit enfin la force de poussée, $\boxed{F_s = D v_s \simeq 7,7 \cdot 10^5 \text{ N}}$, encore inférieur à l'ordre de grandeur initialement évalué et donc qui ne permet toujours pas à lui seul de faire décoller la fusée!
33. On augmente fortement k_{sc} donc aussi M et donc on diminue P_s : le régime est donc fortement sur-détendu au décollage, mais il ne le restera pas ensuite lors de la montée de la fusée.
34. Les forces s'exercent sur la tuyère de propulsion donc à la base de la fusée (ci-dessous, à gauche) ce qui risque d'engendrer des oscillations latérales en cas de déséquilibre (ci-dessous, à droite)



35. Au vu des ordres de grandeur (températures et pressions très élevées), c'est l'hypothèse de réversibilité qui paraît *a priori* la plus douteuse.
36. Lors de la combustion dans le cas (a), la largeur du canal augmente donc sa surface diminue progressivement et $Q(t)$ décroît de plus en plus vite. Dans le cas (b), la croissance du rayon se traduit par une augmentation du rayon du canal donc aussi une augmentation de la surface de contact et $Q(t)$ augmente de plus en plus vite (schéma page suivante).
37. Le canal est délimité par deux cylindres concentriques de rayons $R_1(t)$ et $R_2(t) > R_1(t)$, avec $R_1(0) = \frac{R_0}{2}$ et $R_2(0) = \frac{R_0}{2} + e_0$. La masse évacuée par la croissance de $R_2(t)$ est $dm_2 = \mu 2\pi R_2 dR_2 H$ mais on peut aussi l'écrire $dm_2 = Q_2 dt$, où le débit Q_2 est proportionnel à l'aire de l'interface de combustion $2\pi R_2 H$; on peut

donc écrire $\mu 2\pi R_2 dR_2 h = \lambda 2\pi R_2 h$ donc aussi $dR_2 = \frac{\lambda}{\mu} dt$. Finalement le rayon croît à vitesse constante. Le même raisonnement montre que R_1 décroît à la même vitesse u constante, $R_2(t) = \frac{R_0}{2} + e_0 + ut$, $R_1 = \frac{R_0}{2} - ut$. Finalement, le débit total est $Q(t) = Q_2 + Q_1 = 2\pi\mu H u [R_1(t) + R_2(t)]$ ou enfin $Q = 2\pi\mu H u (R_0 + e_0)$ ou enfin, avec $e_0 \ll 0$, $\boxed{Q = 2\pi\mu H u R_0}$.



38. On remarque que ce débit est constant, ce qui permet sans doute un dimensionnement plus simple de l'appareil.
39. Il est sans doute préférable (mais comment le justifier ?) de disposer d'une force de propulsion indépendante du temps, donc de choisir le profil (c).
40. On peut imaginer de combiner un canal central cylindrique et un canal plan de façon à ce que les deux concavités se compensent.
41. Avec une force de poussée constante, le vitesse de la fusée augmenterait de manière constante si la masse était constante. La pente de la courbe proposée mesure l'accélération de la fusée. Cette pente augmente d'abord régulièrement après le décollage du fait de la diminution de la masse de la fusée. La tangente à l'origine $\Gamma \simeq 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ permet d'estimer la force de poussée au décollage F_0 puisque $m_0 \Gamma = F_0 - m_0 g$ soit ici $\boxed{F_0 = m_0(g + \Gamma_0) \simeq 1,2 \cdot 10^7 \text{ N}}$. Ainsi la poussée du moteur Vulcain ne représente que 6% de la poussée totale au décollage.