

Physique B - XEULC - Filière PC

Dynamique de lignes de tourbillon dans les fluides parfait

1. L'équation de Maxwell-Ampère de la magnétostatique s'écrit : $\vec{\text{rot}} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)$. L'analogie du champ des vitesses est le champ magnétique.

Remarque : attention aux symétries, $\vec{u}$ est un vecteur polaire et $\vec{B}$ un vecteur axial et alors que $\vec{\omega}$ est un vecteur axial et $\vec{j}$ un vecteur polaire.

2. Le champ magnétique vérifie aussi : $\text{div} \vec{B}(M) = 0$. Son équivalent pour le problème fluide considéré est donc $\text{div} \vec{u}(M) = 0$, qui traduit le caractère incompressible de l'écoulement.

3. Le théorème d'Ampère s'énonce ainsi : la circulation du champ magnétique le long d'un contour est égale à μ_0 fois l'intensité du courant traversant ce contour, ce qu'on peut écrire :

$$\oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{l}_P = \mu_0 \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}_M,$$

où $\mathcal{S}$ est une surface s'appuyant sur le contour $\mathcal{C}$.

Pour le problème fluide :

$$\oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{u}(P) \cdot d\vec{l}_P = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{\omega}(M) \cdot d\vec{S}_M.$$

Remarque : ce n'est rien d'autre que l'écriture du théorème de Stokes.

Pour simplifier, on écrira : $\mathcal{C}_u = \Phi_\omega$.

4. Un plan de symétrie de la vorticité est plan d'antisymétrie du champ des vitesses $\vec{u}$ et réci-proquement. Donc $\vec{u}(M)$ est orthogonal à tout plan de symétrie de la vorticité et tangent à tout plan d'antisymétrie de celle-ci.

La notation $\vec{x}$ pour désigner le vecteur position est curieuse et non explicitée, elle a pu d sar onner certains candidats.

5. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la vorticité, donc $\vec{u}(M)$ est dirigé par $\vec{e}_\theta$: $\vec{u}(M) = u(M) \vec{e}_\theta$. La distribution de vorticité étant invariante par tout translation selon $\vec{e}_z$ et par toute rotation autour de l'axe (Oz) , $u(M) = u(r)$. Finalement : $\vec{u}(M) = u(r) \vec{e}_\theta$.

On applique le théorème de Stokes le long du cercle passant par M , d'axe (Oz) : $2\pi r u(r) = \Gamma$.

Donc :

$$\vec{u}(M) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

1 Mouvement de lignes de vorticité

6. Les symétries et les invariances sont les mêmes que pour le problème de la question 5. La circulation de $\vec{u}$ le long du cercle de rayon r est toujours égale à $2\pi r u(r)$. Pour exprimer le flux de $\vec{\omega}$, il faut distinguer le cas $r \leq a$: $\Phi_\omega = \Omega \pi r^2$, et le cas $r > a$: $\Phi_\omega = \Omega \pi a^2$.

Donc :

$$\begin{cases} \text{pour } r \leq a, \vec{u}(M) = \frac{\Omega r}{2} \vec{e}_\theta \\ \text{pour } r > a, \vec{u}(M) = \frac{\Omega a^2}{2r} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

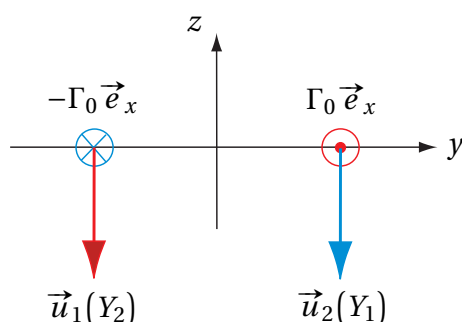
7. L'évolution de la vorticité au cours du temps est décrite par la dérivée particulière de $\vec{\omega}$:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt}(M, t) = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}(M, t) + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{\omega}(M, t).$$

Or, pour un champ de la forme $\vec{u} = u(r) \vec{e}_\theta$ et avec $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$, $(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{\omega} = \frac{u(r)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Omega \vec{e}_z) = \vec{0}$. Par ailleurs, $\vec{\omega}$ ne dépend pas explicitement du temps donc $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{0}$.

Finalement : $\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{0}$: l'advection de la vorticité par ce champ de vitesse en modifie pas la distribution de vorticité. Le tube de vorticité reste donc immobile et invariant dans le temps.

8. Au niveau de la ligne 2, le vecteur $\vec{e}_\theta$ de la ligne 1 est $-\vec{e}_z$, de même pour le vecteur $\vec{e}_\theta$ de la ligne 2 au niveau de la ligne 1.



Donc :

$$\vec{u}_1(Y_2) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi\ell} \vec{e}_z = \vec{u}_2(Y_1).$$

9. Au niveau de la paroi, la vitesse est tangente à celle-ci, donc $\vec{u}(y=0) \cdot \vec{e}_y = 0$.

10. On veut que $\vec{u}$ soit tangent au plan $y=0$ en un point de ce plan. Il faut donc que le plan $y=0$ soit plan d'antisymétrie de la vorticité : la circulation de la ligne fictive est $\vec{\Gamma}_f = -\Gamma_0 \vec{e}_x$.

Le mouvement ultérieur de la ligne de vorticité est donc celui qui a été étudié à la question 8 (en remplaçant ℓ par $2d$) : elle se déplace dans les sens décroissant de l'axe (Oz), à la vitesse $-\frac{\Gamma_0}{4\pi d} \vec{e}_z$.

2 Anneau de vorticité

11. Le plan de l'anneau est plan de symétrie de la vorticité donc, en un point de ce plan, $\vec{u}$ est orthogonal à ce plan : la vitesse est portée par $\vec{e}_x$. Par ailleurs, l'anneau est invariant par toute rotation autour de l'axe (Ox), $\vec{u}(P)$ ne dépend pas de θ . Enfin, un point de l'anneau est par définition un point de coordonnées $r=R$ et x fixé. Finalement, en tout point de l'anneau, $\vec{u} = V \vec{e}_x$. L'anneau est en translation parallèlement à son axe.

On peut se demander si le champ de vitesse est bien défini au niveau de l'anneau de vorticité.

12. D'après le résultat de la question 5 par exemple, on peut affirmer que $\alpha = -1$ et $\beta = 1$: $V = C \frac{R}{\Gamma}$.

13. D'après le résultat de la question 10, au niveau des trois derniers points : $V = \frac{\Gamma_0}{4\pi d}$.

On mesure une distance parcourue d'environ 15 mm sur la figure 5 entre l'antépénultième et le dernier point, donc en 0,42 s. Le facteur d'échelle est de 45 mm pour 1 cm, ce qui représente une distance parcourue de 1/3 de cm. On en déduit : $V = \frac{10^{-2}}{3 \times 0,42} = \frac{1}{126} \simeq 8 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$.

La distance d correspond à 5 mm sur la figure, sachant que 1 cm est représenté par 17 mm, donc $d = \frac{5}{17} \simeq 0,3$ cm.

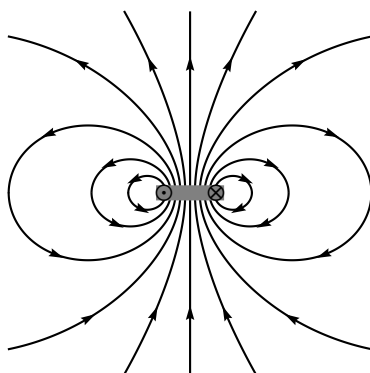
On en déduit : $|\Gamma_0| = V \times 4\pi d \simeq 8 \times 4\pi \times 3 \times 10^{-6} \simeq 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = 3 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

14. On observe bien un mouvement rectiligne et uniforme dans la première phase du mouvement. L'anneau parcourt 3 cm en $12 \times 0,21$ s. Dans cette phase, son rayon est de 25/45 cm (on mesure 25 mm pour R et l'échelle donne 45 mm pour 1 cm).

Alors, en exprimant toutes les distances en cm :

$$C = \frac{VR}{|\Gamma_0|} = \frac{3}{12 \times 0,21} \times \frac{25}{45} \times \frac{1}{3} \simeq \frac{25}{2,5 \times 45} = \frac{10}{45} \simeq 2 \times 10^{-1}.$$

15. Les lignes de champ dipolaire autour de l'anneau ont l'allure suivante :

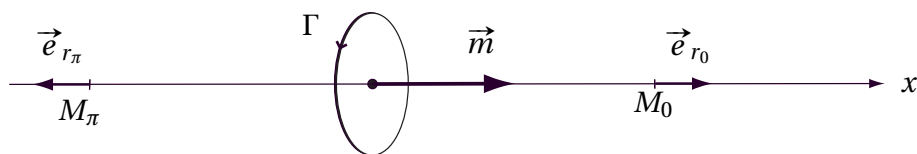


Le moment magnétique d'une boucle de courant est : $\vec{\mathcal{M}} = IS\vec{n}$. Dans l'expression du champ magnétique créé par un dipôle (*expression qui n'est pas au programme de la filière PC*), figure $\mu_0 \|\vec{\mathcal{M}}\|$ là où dans la formule (4) on trouve simplement $\|\vec{m}\|$. On prendra donc : $\mu_0 \vec{\mathcal{M}}$ analogue à $\vec{m}$, soit $\vec{m}$ analogue à $\mu_0 IS\vec{n}$. Comme Γ est analogue à $\mu_0 I$, il vient :

$$\vec{m} = \Gamma S\vec{n} = \Gamma \pi R^2 \vec{n},$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire orthogonal au plan de l'anneau, orientée selon la « règle de la main droite ».

16.



À grande distance, l'approximation dipolaire est valable.

Pour $\theta = 0$ (point M_0), $\vec{e}_r = \vec{e}_x$, $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$, alors que pour $\theta = \pi$ (point M_π), $\vec{e}_r = -\vec{e}_x$, $\cos\theta = -1$ et $\sin\theta = 0$.

Finalement, en tout point de l'axe (Ox), à la distance $L \gg R$ du centre de l'anneau :

$$\vec{u} = \frac{\Gamma \pi R^2}{4\pi L^3} \times 2 \vec{e}_x = \frac{\Gamma R^2}{2\pi L^3} \vec{e}_x.$$

17. On obtient immédiatement : $\vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\Gamma_1 R_1^2}{2\xi(t)^3} \vec{e}_x$.

Pour $\vec{u}_{2 \rightarrow 1}$, il faut faire attention au signe ! D'après la question précédente, le champ des vitesses est dans le même sens de part et d'autre de l'anneau. Donc : $\vec{u}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\Gamma_2 R_2^2}{2\xi(t)^3} \vec{e}_x$.

18. D'après les questions précédentes, on peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \frac{dx_1}{dt} \vec{e}_x = \left(\frac{\Gamma_2 R_2^2}{2\xi(t)^3} + \frac{C\Gamma_1}{R_1} \right) \vec{e}_x, \\ \vec{u}_2 = \frac{dx_2}{dt} \vec{e}_x = \left(\frac{\Gamma_1 R_1^2}{2\xi(t)^3} + \frac{C\Gamma_2}{R_2} \right) \vec{e}_x. \end{cases}$$

On soustrait ces deux équations, on projette sur $\vec{e}_x$, on obtient :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2\xi(t)^3} (\Gamma_1 R_1^2 - \Gamma_2 R_2^2) + C \left(\frac{\Gamma_2}{R_2} - \frac{\Gamma_1}{R_1} \right).$$

19. En faisant apparaître les grandeurs δ et ϵ , l'expression de $\frac{d\xi}{dt}$ devient :

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\delta \Gamma_1 R_1^2}{2\xi(t)^3} + C\epsilon \frac{\Gamma_1}{R_1} = C\epsilon \frac{\Gamma_1}{R_1} \left(1 - \frac{\xi_c^3}{\xi(t)^3} \right) \text{ où } \xi_c = \left(\frac{\delta}{2C\epsilon} \right)^{1/3} R_1.$$

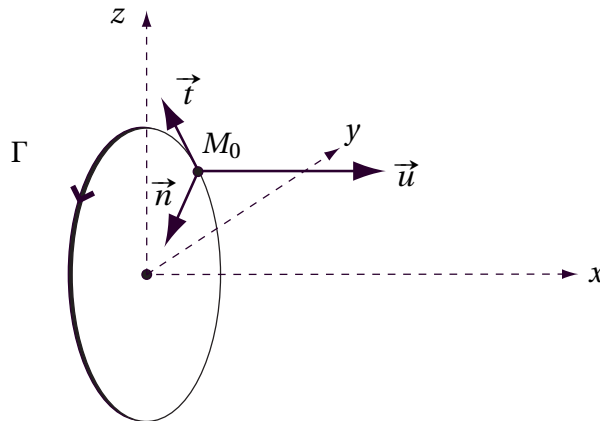
Si $\xi_0 > \xi_c$, alors $\frac{d\xi}{dt}(t=0) > 0$. Donc $\xi(t)$ augmente initialement, mais si $\xi(t)$ augmente, $\frac{d\xi}{dt}$ aussi d'après l'expression ci-dessus, la dérivée reste donc positive : les deux anneaux s'éloignent.

Inversement, si $\xi_0 < \xi_c$, alors $\frac{d\xi}{dt}(t=0) < 0$. Donc $\xi(t)$ diminue initialement, mais si $\xi(t)$ diminue, $\frac{d\xi}{dt}$ aussi d'après l'expression ci-dessus, la dérivée reste donc négative : les deux anneaux se rapprochent.

20. Ce modèle ne permet pas de décrire la collision des deux anneaux dans le cas où ils se rapprochent car l'approximation dipolaire pour exprimer le champ des vitesses n'est plus valable. Par ailleurs, il donne une vitesse infinie, ce qui pose problème.

3 Auto-induction d'une ligne de vorticité

21.



Pour l'anneau de vorticité, $\vec{t} = \vec{e}_\theta$, $\vec{n} = -\vec{e}_r$ et $\mathcal{R} = R$, l'équation (6) donne donc : $\vec{u} = \frac{C\Gamma}{R} \vec{e}_x$. On retrouve bien les résultats de la partie 2.

22. L'équation (6) donne :

$$\vec{u} = C\Gamma_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

Or $\vec{u} = \frac{DY}{Dt} \vec{e}_y + \frac{DZ}{Dt} \vec{e}_z$, avec, par exemple : $\frac{DY}{Dt} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\overrightarrow{\text{grad}} Y)$. Or $\overrightarrow{\text{grad}} Y = \frac{\partial Y}{\partial x} \vec{e}_x$ et $\vec{u} \cdot \vec{e}_x = 0$.

Donc : $\frac{DY}{Dt} = \frac{\partial Y}{\partial t}$. De même, on établit que $\frac{DZ}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t}$.

On obtient bien le système d'équations demandé.

23. On remplace $Y(x, t)$ et $Z(x, t)$ par les expressions proposées dans le système précédent. On obtient, après simplification par $\exp i(\omega t - kx)$:

$$\begin{cases} i\omega Y_0 - C\Gamma_0 k^2 Z_0 = 0 \\ C\Gamma_0 k^2 Y_0 + i\omega Z_0 = 0 \end{cases}$$

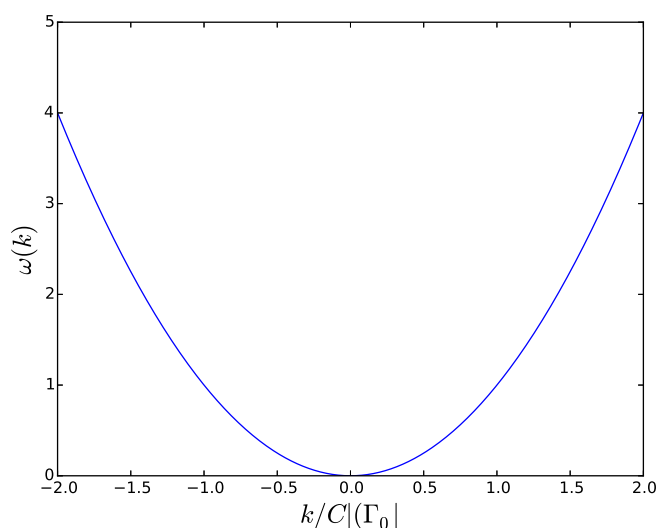
Ce système en (Y_0, Z_0) n'a de solutions différentes de $(0, 0)$ que si son déterminant est nul, ce qui donne :

$$\omega^2 = C^2 \Gamma_0^2 k^4,$$

ou encore :

$$\omega(k) = C|\Gamma_0|k^2.$$

On suppose que $\omega > 0$.



La vitesse phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ dépend de k : les ondes sont dispersives. Deux ondes de longueur d'onde différentes ne se propagent pas à la même vitesse.

24. Le système de la question 23 se simplifie en une seule équation : $Z_0 = iY_0$. L'onde de Kelvin est polarisée circulairement (les deux composantes ont même amplitude et sont déphasées de $\pi/2$: l'extrémité du vecteur $\vec{u}$ décrit donc un cercle dans un plan $x = \text{cste}$).

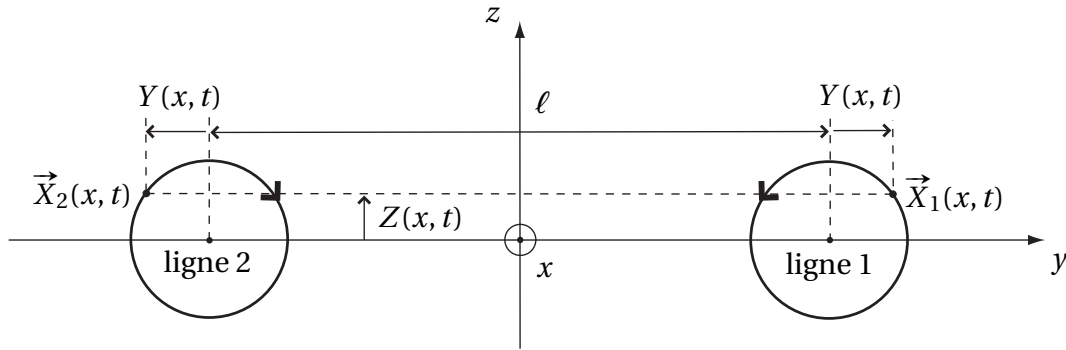
Si $k > 0$, la polarisation est circulaire droite, si $k < 0$ elle est circulaire gauche (la convention est : l'observateur voit l'onde arriver vers lui).

À un instant donné, la ligne de vorticit   a la forme d'une h  lice (« tire-bouchon »).

25. Pour que l'approximation des petites d  formations soit valable, il faut que $|Y|$ et $|Z|$ restent petits devant $\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$.

4 Sillage d'un avion

26. Le schéma dans le plan $x = \text{cste}$ donne :



On obtient immédiatement : $d(x, t) = \ell + 2Y(x, t)$.

27. En utilisant les résultats précédents, on peut écrire :

$$\vec{u}_{2 \rightarrow 1}(x, t) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi d(x, t)} \vec{e}_z = -\frac{\Gamma_0}{2\pi(\ell + 2Y(x, t))} \vec{e}_z.$$

28. $\frac{1}{d} = \frac{1}{\ell} \times \frac{1}{1 + \frac{2Y(x, t)}{\ell}} \simeq \frac{1}{\ell} \left(1 - \frac{2Y(x, t)}{\ell} \right)$, au premier ordre en $\frac{Y(x, t)}{\ell}$.

Donc : $\vec{u}_{2 \rightarrow 1}(x, t) \simeq -\frac{\Gamma_0}{2\pi\ell} + \frac{\Gamma_0}{\pi\ell^2} Y(x, t)$.

On reporte dans l'expression (6) et on utilise les équations (7) et (8). On obtient bien les équations (13) et (14) demandées.

29. On pose $\zeta(x, t) = Z(x, t) + \frac{\Gamma_0}{2\pi\ell} t$. Alors : $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\Gamma_0}{2\pi\ell}$ et $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$.

Le système précédent devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t} = -C\Gamma_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = C\Gamma_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\Gamma_0}{\pi\ell^2} Y. \end{cases}$$

Ce changement de variable revient à étudier l'écoulement dans le référentiel lié à la ligne de vortécité (Cf. question 10), en translation rectiligne et uniforme à la vitesse $-\frac{\Gamma_0}{2\pi\ell} \vec{e}_z$.

30. En procédant comme à la question 23, on obtient le système vérifié par (Y_0, ζ_0) :

$$\begin{cases} i\omega Y_0 - C\Gamma_0 k^2 \zeta_0 = 0 \\ \left(C\Gamma_0 k^2 - \frac{\Gamma_0}{\pi\ell^2} \right) Y_0 + i\omega \zeta_0 = 0. \end{cases}$$

Comme à la question 23, le système n'a de solution non nulle que si son déterminant est nul, ce qui s'écrit :

$$\omega^2 = C^2 \Gamma_0^2 k^4 - \frac{C\Gamma_0^2}{\pi\ell^2} k^2 = C^2 \Gamma_0^2 k^2 (k^2 - k_c^2),$$

où $k_c = \frac{1}{\sqrt{\pi\ell^2 C}}$.

Si $\omega^2 < 0$, ω est imaginaire pure, ce qui est le cas pour $k < k_c$. Dans ce cas, ω se met sous la forme $\omega = \pm \frac{i}{\tau}$. Les solutions sont donc en $\exp(-t/\tau)$ ou $\exp(+t/\tau)$. Dans ce dernier cas, le système admet de solutions exponentiellement croissantes dans le temps.

31. $k < k_c$ pour $\lambda > \lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = 2\pi\sqrt{\pi C\ell}$.

32. $\sigma = |\text{Im}(\omega)|$ donc $\sigma^2 = -\omega^2$ puis :

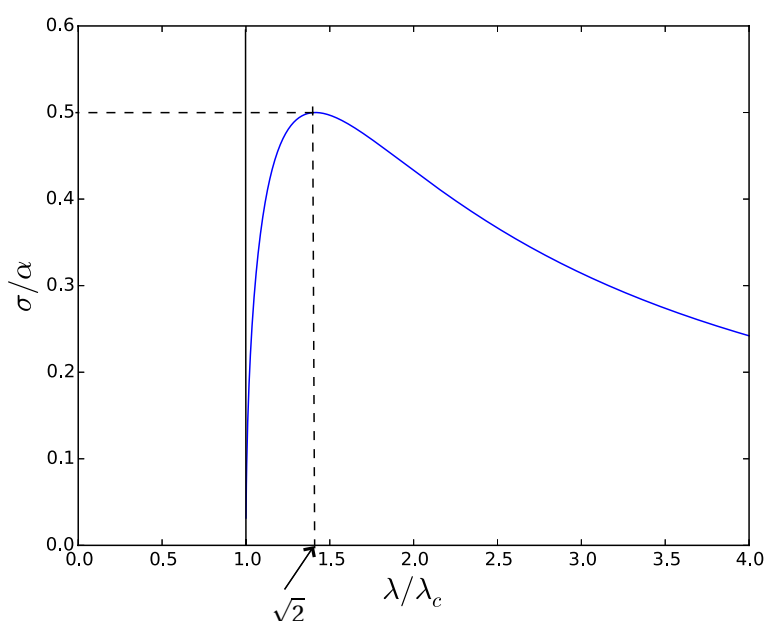
$$\sigma = C|\Gamma_0| \frac{4\pi^2}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{\lambda_c^2} - \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{|\Gamma_0|}{\pi\ell^2} \sqrt{\frac{\lambda_c^2}{\lambda^2} - \frac{\lambda_c^4}{\lambda^4}}.$$

Il est plus simple de dériver σ^2 que σ par rapport à λ .

On obtient : $\frac{d\sigma^2}{d\lambda} = 2\sigma \frac{d\sigma}{d\lambda} = \left(\frac{|\Gamma_0|}{\pi\ell^2}\right)^2 \left(-\frac{2\lambda_c^2}{\lambda^3} + \frac{4\lambda_c^4}{\lambda^5}\right).$

σ est extremum pour $\lambda_m = \sqrt{2}\lambda_c = 2\pi\sqrt{2\pi C\ell}$. σ est positif ou nul et s'annule en λ_c et à l'infini : l'extremum trouvé est bien un maximum.

33. La courbe demandée est (on a posé $\alpha = \frac{|\Gamma_0|}{\pi\ell^2}$) :



34. En prenant $C = 0,2$ (Cf. question 14), on obtient : $\frac{\lambda_m}{\ell} = 2\pi\sqrt{2\pi C} \simeq 2\pi\sqrt{1,25} \simeq 2 \times 3 \times 1,2 \simeq 7$ (on surestime un peu $\sqrt{1,25}$ donc on sous-estime un peu π .)

Sur la figure 8, on évalue le rapport λ_m/ℓ (période de la déformation / écart moyen entre les deux lignes) à 10. L'ordre de grandeur obtenu est tout à fait compatible avec les images de la figure 8.

35. Le système de la question 30 se réduit à la seule équation :

$$\zeta_0 = \frac{i\omega}{C\Gamma_0 k^2} Y_0 = i\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}} Y_0.$$

L'onde est polarisée elliptiquement, les axes de l'ellipse étant les axes (Oy) et (Oz) .

Quand $\lambda \ll \lambda_c$, la polarisation est circulaire, quand $\lambda = \lambda_c$ elle est rectiligne selon Oy . Donc quand λ augmente et se rapproche de λ_c , la polarisation elliptique « s'aplatit » et l'ellipse devient quasiment un segment de droite.

Les polarisations des lignes 1 et 2 sont de sens inverse (l'une droite, l'autre gauche).

On retrouve la polarisation circulaire de la question 24 dans la limite où $\lambda \ll \lambda_c$: c'est normal car, dans ce cas, $\lambda \ll \ell$, ce qui revient à dire que les deux lignes sont infiniment éloignées l'une de l'autre à l'échelle de la déformation.

Corrigé proposé par ÉMILIE FRÉMONT & MARIE-NOËLLE SANZ