

# Proposition de corrigé

## Polytechnique - ENS 2018

### PSI

## A Rendement énergétique du réseau

**Question 1 :** ARQS :  $d \ll \lambda = \frac{c}{f}$ .

**Question 2 :** L'ARQS étant supposée après la question précédente. Donc il faut une faible chute ohmique.

**Question 3 :** Effet Joule.

**Question 4 :**  $I$  est la valeur efficace de  $i(t)$ .

**Question 5 :** La résistance d'un conducteur ohmique de conductivité électrique  $\gamma$ , cylindrique de longueur  $d$  et de section  $S$  est  $R = \frac{d}{\gamma S}$ . Donc ici,  $K$  est influencé par la section  $S$  du conducteur et sa conductivité électrique. Attention à l'effet de peau, qui limite la section "utile" du fil.

**Question 6 :** L'installation doit se comporter comme un dipôle linéaire.  $U_0 = 220V$  et  $f = 50Hz$ . Pour  $c$  de l'ordre de  $3.10^8 m/s$ , on trouve  $d \ll 6000km$ , ce qui est un peu juste à l'échelle d'un pays.

**Question 7 :**  $P = \langle u_D(t)i(t) \rangle_t = U_0 I_0 \cos(\varphi)$  donc :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{K d I_0^2}{P}} = \frac{1}{1 + \frac{K d P}{U_0^2 \cos^2 \varphi}}$$

**Question 8 :** À  $P$ ,  $\varphi$  et  $K$  fixés, on aura intérêt à avoir  $U_0$  grand. Cependant, l'installation doit avoir  $U_0 = 220V$ . On utilisera donc un transport à haute tension (surélevée avec un ou des transformateurs), puis on utilisera un ou des transformateurs avant l'installation pour la réduire.

**Question 9 :**  $i_C(t)$  doit être en quadrature de phase avec  $u_D(t)$ .

**Question 10 :** Redressent du facteur de puissance : avec un diagramme de Fresnel, on trouve rapidement que  $\sin(\varphi) = -\frac{I_C}{I_0}$ . Donc :

$$i_C(t) = -I_0 \sqrt{2} \sin(\varphi) \cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \sqrt{2} \sin(\varphi) \sin(2\pi f t)$$

Soit donc  $\underline{I_C} = -I_0 \sin(\varphi) \exp(j\pi/2) = -j I_0 \sin(\varphi)$  et donc  $I_C = -I_0 \sin(\varphi)$  ( $\sin(\varphi) < 0$ ).

**Question 11 :** On utilise des condensateurs, de capacité totale  $C$ . Alors  $I_C = \omega C U_0 = 2\pi f C U_0$ , et puisqu'on veut  $I_C = -I_0 \sin(\varphi)$  (en se souvenant que  $P = U_0 I_0 \cos(\varphi)$ ) :

$$C = -\frac{P \tan(\varphi)}{2\pi f U_0^2}$$

**Question 12 :**  $X > 0$  : caractère inductif des enroulements. On règle  $e(t)$  en modifiant la tension efficace de l'inducteur (utilisation d'un transformateur).

L'inducteur étant lui même alimenté par le réseau, il est alimenté à  $f$ .

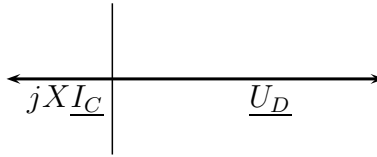
**Question 13 :** Loi des mailles :  $\underline{E} = \underline{U_D} - jX \underline{I_C} = U_0 - jX \underline{I_C}$ . Or pour optimiser le rendement, on veut  $\underline{I_C} = -jI_0 \sin(\varphi)$ . Donc :

$$\underline{E} = U_0 - X I_0 \sin(\varphi)$$

On en déduit donc, avec  $P = U_0 I_0 \cos(\varphi)$ , et puisque  $\sin(\varphi) < 0$  :

$$E = U_0 - \frac{P X \tan(\varphi)}{U_0}$$

**Question 14 :**  $\varphi_m$  est le déphasage entre  $i_C(t)$  et  $u_D(t)$ . Sans perte, on a  $\varphi_m = \frac{\pi}{2}$  (voir question 10) :



**Question 15 :** On dispose des relations suivantes :

$$E^2 = (X I_C)^2 + (U_0)^2 + 2(X I_C)U_0 \sin(\varphi_m) \quad \text{d'après le diagramme de Fresnel} \quad (1)$$

$$P = U_0 I_0 \cos(\varphi) \quad (2)$$

$$P_C = U_0 I_C \cos(\varphi_m) \quad (3)$$

$$-I_0 \sin(\varphi) = I_C \sin(\varphi_m) \quad \text{pour optimiser la distribution} \quad (4)$$

Alors avec 3 et 4 :  $(I_C \cos(\varphi_m))^2 + (I_C \sin(\varphi_m))^2 = I_C^2 = \left(\frac{P_C}{U_0}\right)^2 + (I_0 \sin(\varphi))^2$ . En utilisant cette expression de  $I_C^2$  ainsi que 4 dans 1 :

$$E^2 = X^2 \left( \left(\frac{P_C}{U_0}\right)^2 + (I_0 \sin(\varphi))^2 \right) - U_0^2 + 2X U_0 I_0 \sin(\varphi)$$

Soit donc :

$$E^2 = (U_0 - X I_0 \sin(\varphi))^2 + \left(\frac{X P_C}{U_0}\right)^2$$

Finalement, avec 2 :

$$E = \sqrt{\left(U_0 - \frac{P X \tan(\varphi)}{U_0}\right)^2 + \left(\frac{P_C X}{U_0}\right)^2}$$

Bien sûr, on retrouve le résultat de la question 13 pour  $P_C = 0$ .

**Question 16 :** La fcm (ou fem) d'un accumulateur dépend du courant (surtensions à chaque électrodes). Pour un courant suffisamment lissé, on peut donc considérer cette fcm comme constante.

**Question 17 :** Avec  $L$ , pas d'association directe entre la source de tension variable et la source de tension continue ?

**Question 18 :** Pour que le courant soit bien lissé, il faut  $\frac{L}{R} \gg \frac{1}{f}$  et donc  $L \gg \frac{R}{f}$ .

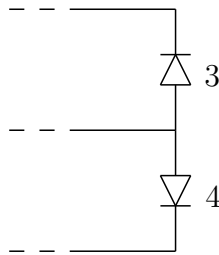
**Question 19 :** 1 et 2 sont complémentaires ainsi que 3 et 4 ( $u_D(t)$  jamais en court-circuit).

**Question 20 :**  $i_A(t)$  jamais nul (source de courant) donc cette partie du circuit doit être fermée à tout instant, ce qui nécessite la fermeture simultanée de deux interrupteurs : 1 et 3 ou 1 et 4 ou 2 et 3 ou 2 et 4.

**Question 21 :**

- pour  $i(t) > 0$  (de  $t = 0$  à  $t_1$ ),  $i_A(t) = i(t) > 0$  et donc 1 et 4 passants.
- pour  $i(t) < 0$  (de  $t = t_2$  à  $t_3$ ),  $i_A(t) = -i(t) > 0$  et donc 2 et 3 passants.

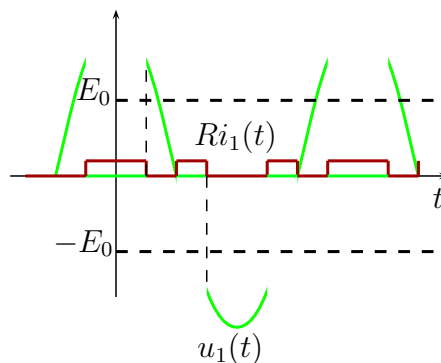
D'où :



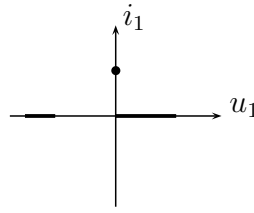
**Question 22 :**

- De  $t_1$  à l'instant où  $u_D(t)$  s'annule ( $t'_1$ ),  $i(t)$  est nul donc :
  - soit 1 et 3 fermés et 2 et 4 ouverts : le souci est alors la tension aux bornes de 4 n'a pas le bon signe
  - soit 2 et 4 fermés et 1 et 3 ouverts : alors  $u_1(t) = u_D(t)$ .
- De  $t'_1$  à  $t_2$ ,  $i(t)$  est nul donc :
  - soit 1 et 3 fermés et 2 et 4 ouverts : alors  $u_1(t) = 0$ .
  - soit 2 et 4 fermés et 1 et 3 ouverts : le souci est alors la tension aux bornes de 3 n'a pas le bon signe

D'où :



**Question 23 :** Si ce raisonnement est juste, on obtiendrait alors :

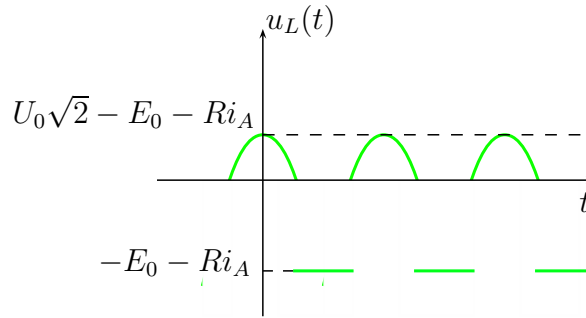


Il s'agirait donc d'un thyristor ??

**Question 24 :**

- Lorsque  $i(t) > 0$  :  $u_L(t) + Ri_A(t) + E_0 = |u_D(t)|$ .
- Lorsque  $i(t) = 0$  :  $u_L(t) + Ri_A(t) + E_0 = 0$ .

D'où :



Puisque  $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$  n'est pas nul, la simulation devrait faire apparaître une ondulation en courant. Avec  $I_{Am}$  plus grand, l'importance relative de cette ondulation est moindre.

**Question 25 :** Le spectre de ce signal périodique mais non harmonique contient donc des signaux de fréquences  $nf$  avec  $n$  entier.

On ne peut pas optimiser le réseau à la fois pour le fondamental, et pour les harmoniques.

**Question 26 :**  $\langle i_C(t) \rangle_t = \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} C \frac{du_C}{dt} dt = \frac{C}{T_H} [u_C(T_H) - u_C(0)] = 0$  car le régime est périodique.

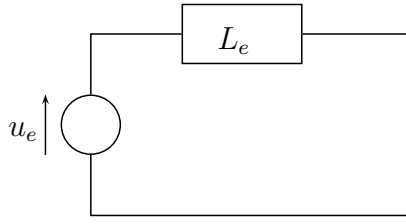
De même pour  $u_{Le}(t) = L_e \frac{di_e}{dt}$  :  $\langle u_{Le}(t) \rangle_t = 0$ .

**Question 27 :**  $T_H$  doit être petit devant les différentes constantes de temps des différentes parties du circuit.

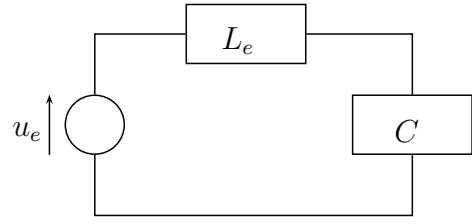
En fonction des ouvertures et fermetures des interrupteurs, on peut identifier :

$$R_S C_S \quad ; \quad \sqrt{L_S C_S} \quad ; \quad \sqrt{L_e C}$$

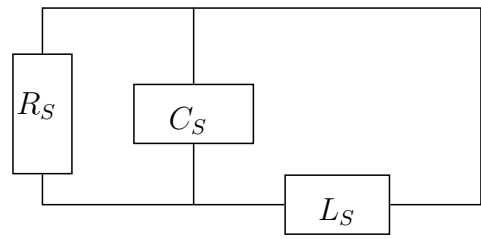
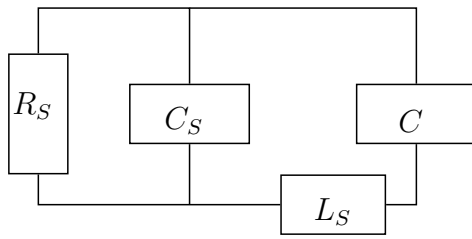
**Question 28 :**



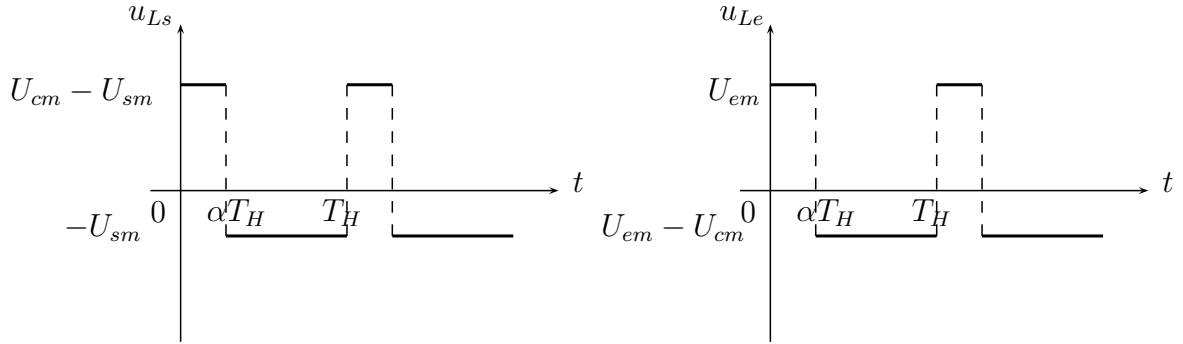
$K_1$  fermé  
 $K_2$  ouvert



$K_1$  ouvert  
 $K_2$  fermé



**Question 29 :**



**Question 30 :**  $\langle u_{Ls} \rangle = \alpha(U_{cm} - U_{sm}) - (1 - \alpha)U_{sm} = 0$  et  $\langle u_{Le} \rangle = \alpha U_{em} + (1 - \alpha)(U_{em} - U_{cm}) = 0$ .

Donc  $U_{cm} = \frac{U_{sm}}{\alpha} = \frac{U_{em}}{1 - \alpha}$ .

On en déduit :

$$\frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Il s'agit d'un hacheur survolteur ( $\frac{U_{sm}}{U_{em}} > 1$ ) pour  $\alpha > 1/2$ .

**Question 31 :** Par un bilan de puissance, et puisque  $u_e$ ,  $i_e$ ,  $u_s$  et  $i_s$  sont considérées comme constantes :  $U_{em}I_{em} = U_{sm}I_{sm} = \frac{U_{sm}^2}{R_s} = \frac{U_{em}^2}{R_s} \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2$ . D'où :

$$I_{em} = \frac{U_{em}}{R_s} \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2$$

**Question 32 :** On souhaite minimiser l'ondulation ?

**Question 33 :** De  $t = \alpha T_H$  à  $t = T_H$  :  $i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = i_e(t) = I_{em} = \frac{U_{em}}{R_s} \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2$ .

Alors  $du_C = \frac{U_{em}}{R_s C} \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2 dt$  puis par intégration de  $\alpha T_H$  à  $T_H$  :

$$u_{Cmax} - u_{Cmin} = \frac{U_{em} T_H}{R_s C} \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}$$

Par ailleurs,  $U_{cm} = \frac{U_{em}}{1-\alpha}$  avec la question 30. Donc finalement :

$$\frac{u_{Cmax} - u_{Cmin}}{2U_{cm}} = \frac{T_H \alpha^2}{2R_S C}$$

**Question 34 :** On élève la tension à la sortie de la source ( $\alpha > 1$ ) afin d'avoir, à puissance transportée  $U_0 I$  constante, un courant  $I$  plus faible dans la ligne et donc une puissance perdue  $R_S I^2$  moindre. Puis on effectue l'opération inverse ( $\alpha < 1$ ) avant l'installation. C'est l'équivalent, pour les courants alternatifs, des transformateurs.

**Question 35 :** Erreur d'énoncé :  $P_L = K d I^2$  et  $P = U_0 I$  ?

Avec ce qui précède, on a  $\frac{I'}{I} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$  à puissance  $P$  donnée donc  $P'_L = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 P_L$ .

Or  $\eta = \frac{1}{1+P_L/P}$  donc  $\frac{P_L}{P} = \frac{1-\eta}{\eta}$  et de même  $\frac{P'_L}{P} = \frac{1-\eta'}{\eta'} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \frac{P_L}{P}$ .

On en déduit, en faisant le rapport de ces deux expressions :

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} = \sqrt{\frac{(1-\eta')\eta}{(1-\eta)\eta'}}$$

Donc :

$$\alpha = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{(1-\eta')\eta}{(1-\eta)\eta'}}} \simeq 0,91$$

## B Incidents dans les lignes

**Question 36 :** Petits mouvements, modèle linéique, poids négligé, corde sans raideur (voir cours).  $\vec{T}(x_0, t)$  est la force exercée par la partie  $x > x_0$  sur la partie  $x < x_0$ .

Remarque : à la lecture de la suite, il était attendu :  $\vec{T}(x_0, t)$  est la force exercée par la partie  $x < x_0$  sur la partie  $x > x_0$ .

**Question 37 :** Voir cours :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

**Question 38 :**  $\mu j \omega \frac{\partial y}{\partial t} = -j k T_y$  donc  $Z = -\sqrt{T_0 \mu}$ .

La relation de dispersion est  $\omega^2 = \frac{T_0}{\mu} k^2$ . Pour  $k > 0$  la propagation se fait dans le sens des  $x$  croissants, et pour  $k < 0$  dans le sens des  $x$  décroissants.

**Question 39 :**  $v_g = v_\varphi = c$  : pas de dispersion.

**Question 40 :**  $y_r = \underline{Y}_r \exp(j(\omega t + kx))$ . Le système d'équations étant linéaire, la pulsation de l'onde produite par l'onde incidente a la même pulsation que cette onde.

**Question 41 :**  $y(x=0, t) = \underline{y}_i(x=0, t) + \underline{y}_r(x=0, t) = 0$  donc  $\underline{Y}_r = -\underline{Y}_i$  et donc  $\underline{\rho} = -1$ .

**Question 42 :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial(e_c dx)}{\partial t} &= \vec{T}(x+dx, t) \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial t}(x+dx, t) \vec{e}_y \right) - \vec{T}(x, t) \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \vec{e}_y \right) + p_i dx \\ \Rightarrow \mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx &= T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x+dx, t) \frac{\partial y}{\partial t}(x+dx, t) - T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + p_i dx \\ \Rightarrow \mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \right) + p_i = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial t} + T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + p_i\end{aligned}$$

Alors, avec l'équation de propagation  $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  :

$$p_i = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$$

**Question 43 :**  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$  avec le Théorème de Schwartz donc  $p_i = -\frac{\partial e_p}{\partial t}$  avec l'expression proposée.

**Question 44 :** En définissant plutôt  $P(x, t) = -T_y(x, t) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = -\vec{T}(x, t) \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \vec{e}_y \right)$  la puissance reçue par la partie au delà de  $x$  de la part de l'autre partie (par cohérence avec la définition de  $\vec{T}$  proposée en question 36), on trouve bien l'expression demandée (en utilisant l'équation de propagation).

$P$  correspond ici à la composante suivant  $\vec{e}_x$  du vecteur de Poynting. Cette équation traduit donc un bilan d'énergie, sans perte, ce qui est bien sûr cohérent avec notre modèle.

**Question 45 :** En prenant arbitrairement une phase nulle pour l'onde incidente :  $y(x, t) = Y_i(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) = 2Y_i \sin(kx) \sin(\omega t)$ .

Alors :

$$P(x, t) = 4T_0 Y_i^2 \omega k \cos(kx) \sin(\omega t) \sin(kx) \cos(\omega t) = T_0 Y_i^2 \omega k \sin(2kx) \sin(2\omega t)$$

On en déduit que  $P(x, t) = 0$ , à tout instant, aux points d'abscisses  $2kx_q = q\pi$  et donc  $x_q = q \frac{\lambda}{2}$ , avec  $q$  un entier, puisque  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

On vérifie que  $x_{q+1} - x_q = \frac{\lambda}{2}$ .

**Question 46 :**  $\Gamma$  en  $s.\Omega^{-1}.m^{-1}$  et  $\Lambda$  en  $\Omega.s.m^{-1}$  :  $c$  est une vitesse et  $\underline{Z}_C$  une impédance.

**Question 47 :** D'un côté on a :

$$\begin{aligned}\bullet \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \\ \bullet \quad \frac{\partial i}{\partial x} &= -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}$$

De l'autre

$$\begin{aligned}\bullet \quad \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) &= -\frac{T_y}{\partial x} \\ \bullet \quad \frac{\partial T_y}{\partial t} &= T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

$$i \longleftrightarrow v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$u \longleftrightarrow -T_y = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\Lambda \longleftrightarrow \mu$$

$$\Gamma \longleftrightarrow \frac{1}{T_0}$$

$$e_c \longleftrightarrow \frac{1}{2} \Lambda i^2 \text{ (énergie magnétique linéique)}$$

$$e_p \longleftrightarrow \frac{1}{2} \Gamma u^2 \text{ (énergie électrique linéique)}$$

$$P \longleftrightarrow ui$$

**Question 48 :** L'onde est progressive si  $\underline{U}_r = 0$ , c'est à dire si  $\underline{Z}_C = \underline{Z}_D$ .

**Question 49 :**  $\underline{Z}_D$  est infinie et  $d = a$  donc on trouve, puisque  $\underline{U}(0) = U_0\sqrt{2}$  :

$$\underline{I}(0) = \frac{U_0\sqrt{2}j \tan(ka)}{\underline{Z}_C}$$

Par ailleurs,  $\underline{U}(0) = U_0\sqrt{2} = \underline{U}_i(1 + \exp(-2jka))$  donc  $\underline{U}_i = \frac{U_0\sqrt{2}}{2\cos(ka)} \exp(jka)$ . On en déduit :

$$\underline{U}(a) = \frac{U_0\sqrt{2}}{\cos(ka)}$$

**Question 50 :** Pour  $a = \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2k}$ , la tension en bout de ligne diverge et l'intensité en début de ligne aussi.

Vue de l'entrée, la ligne quart d'onde ouverte se comporte comme un court circuit. En pratique, on aura claquage en bout de ligne, probablement.