

Problème 1 : jonction Josephson

[1] $|\Psi|^2$ est la densité de probabilité de présence d'une paire de Cooper entre x et $x+dx$. Son unité est le m^{-1} .

$e(x) = \underbrace{-2e}_{\text{charge d'une paire de Cooper}} |\Psi(x)|^2$ apparaît comme la densité de charge par mètre.

Equation de Schrödinger: $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x) \Psi \quad \times \Psi^\dagger$

Conjuguée: $-i\hbar \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^\dagger}{\partial x^2} + U(x) \Psi^\dagger \quad \times \Psi$

La soustraction donne:

$$i\hbar \left(\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\Psi^\dagger \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^\dagger}{\partial x^2} \right)$$

$$-\frac{i\hbar}{2e} \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{e\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{i} \Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{i} \Psi \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e\hbar}{m} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i} \Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial I}{\partial x}$$

On retrouve (au signe près...), une équation de conservation de la charge.

[2] $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \Psi$

Solution stationnaire: $\Psi(x,t) = \psi(x) \beta(t)$, β à déterminer.

$$i\hbar \psi(x) \beta'(t) = E \psi(x) \beta(t)$$

$$i\hbar \beta' - E\beta = 0 \quad \beta' + \frac{iE}{\hbar} \beta = 0 \quad \beta(t) = \underline{K} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Donc Ψ peut bien se mettre sous la forme $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

Dans la région normale, $U(x) = U$. $\Psi(x, t) = \Psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

2

Dans Schrödinger, $i\hbar \times \left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U\Psi$

$$E\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'' + U\Psi$$

[3] Sous forme canonique, $\Psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0$

Si $E < U$, les solutions sont bien de la forme $\Psi(x) = A \operatorname{ch}(Kx) + B \operatorname{sh}(Kx)$

[4] Continuité de Ψ à l'interface 1:

$$\sqrt{m_1} e^{i\theta_1} = \Psi(-d) = A \operatorname{ch}(Kd) - B \operatorname{sh}(Kd)$$

A l'interface 2:

$$\sqrt{m_2} e^{i\theta_2} = \Psi(d) = A \operatorname{ch}(Kd) + B \operatorname{sh}(Kd)$$

$$\text{Somme: } 2A \operatorname{ch}(Kd) = \sqrt{m_1} e^{i\theta_1} + \sqrt{m_2} e^{i\theta_2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{m_1} e^{i\theta_1} + \sqrt{m_2} e^{i\theta_2}}{2 \operatorname{ch}(Kd)}$$

$$\text{Différence: } 2B \operatorname{sh}(Kd) = \sqrt{m_2} e^{i\theta_2} - \sqrt{m_1} e^{i\theta_1} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{m_2} e^{i\theta_2} - \sqrt{m_1} e^{i\theta_1}}{2 \operatorname{sh}(Kd)}$$

[5] La question [1] définit le courant $I = \frac{2e\hbar}{m} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$

$$I = \frac{2e\hbar}{m} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i} (A^* \operatorname{ch}(Kx) + B^* \operatorname{sh}(Kx)) (AK \operatorname{sh}(Kx) + BK \operatorname{ch}(Kx)) \right)$$

$$= \frac{2e\hbar K}{m} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i} \left(\underbrace{|A|^2 \operatorname{ch}(Kx) \operatorname{sh}(Kx)}_{\text{réel}} + \underbrace{|B|^2 \operatorname{ch}(Kx) \operatorname{sh}(Kx)}_{\text{réel}} + A^* B \operatorname{ch}^2(Kx) + B^* A \operatorname{sh}^2(Kx) \right) \right)$$

$$= \frac{2e\hbar K}{m} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i} (A^* B (1 + \operatorname{sh}^2(Kx)) + B^* A \operatorname{sh}^2(Kx)) \right) = \frac{2e\hbar K}{m} \operatorname{Re} \left(\frac{A^* B}{i} \right)$$

$$\frac{A^* B}{i} = \frac{(\sqrt{m_1} e^{-i\theta_1} + \sqrt{m_2} e^{-i\theta_2}) (\sqrt{m_2} e^{i\theta_2} - \sqrt{m_1} e^{i\theta_1})}{i 4 \operatorname{ch}(Kd) \operatorname{sh}(Kd)}$$

$$= \frac{-m_1 + m_2 + \sqrt{m_1 m_2} 2i \sin(\theta_2 - \theta_1)}{i 4 \operatorname{ch}(Kd) \operatorname{sh}(Kd)}$$

$$I = \frac{e\hbar K}{m} \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{2 \operatorname{ch}(Kd) \operatorname{sh}(Kd)} \sin \phi$$

$$I_c = \frac{e\hbar K \sqrt{m_1 m_2}}{m \operatorname{ch}(Kd) \operatorname{sh}(Kd)}$$

[6] Dans les régions S_1 et S_2 , $\Psi(x,t) = \sqrt{m_j} e^{i\theta_j} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

donc $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{m_1} e^{i\theta_1} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \right) = E_1 \Psi$

$$i\hbar \times \left(i \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - i \frac{E}{\hbar} \right) \Psi = E_1 \Psi \Rightarrow -\hbar \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + E = E_1$$

De même, on montre que $-\hbar \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + E = E_2$

Soustraction: $\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\theta_2 - \theta_1) = E_1 - E_2 = 2eV \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}$

[7]. La première équation Josephson montre que $I_s(\phi) = I_c \sin \phi$, dont l'amplitude maximale est par définition $\max_{\phi} I_s(\phi)$.

• Pour $V \neq 0$, la fréquence du courant est $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{eV}{\pi \hbar} \Rightarrow \frac{\phi_J}{V} = \frac{e}{\pi \hbar}$

AN: $\frac{e}{\pi \hbar} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{\pi \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}} = 0,5 \cdot 10^{-19+34} = 0,5 \cdot 10^{15} = 0,5 \text{ GHz}/\mu\text{V}$

$$\frac{1 \text{ GHz}}{1 \mu\text{V}} = 10^{9+6} = 10^{15}$$

Pour $V=0$, ϕ est constant. Pour $V \neq 0$, $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{cte}$ donc ϕ varie linéairement.

[8] $\delta W_{\text{elec}} = V I dt = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \phi}{\partial t} I_c \sin \phi dt = \frac{\hbar I_c}{2e} \frac{\partial}{\partial t} (1 - \cos \phi)$
 E_c

[9] $V = L \frac{dI}{dt}$ pour une bobine d'inductance L .

Ici, $V = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \phi}{\partial t}$ d'après la deuxième équation Josephson

et la dérivée de la première équation Josephson donne

$$\frac{\partial I_s}{\partial t} = I_c \cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\frac{\partial I_s}{\partial t}}{I_c \cos \phi}$$

d'où $V = \frac{\hbar}{2e I_c \cos \phi} \frac{\partial I_s}{\partial t}$

$\frac{L_c}{\cos \phi}$ avec $L_c = \frac{\hbar}{2e I_c}$

$$[10] \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2d \frac{2\pi}{\Phi_0} B \Rightarrow \phi(y) = 2d \frac{2\pi}{\Phi_0} B y + cte$$

$$\phi\left(-\frac{w}{2}\right) = 2d \frac{2\pi}{\Phi_0} B \left(-\frac{w}{2}\right) + cte \Rightarrow \phi(y) = 2d \frac{2\pi}{\Phi_0} B \left(y + \frac{w}{2}\right) + \phi\left(-\frac{w}{2}\right)$$

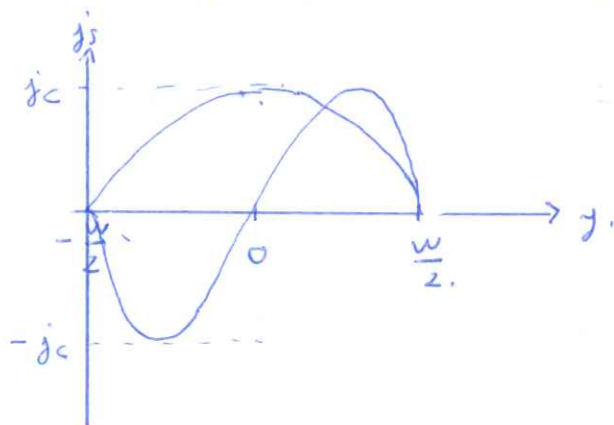
$$\Delta \phi = \phi\left(\frac{w}{2}\right) - \phi\left(-\frac{w}{2}\right) = 2d \frac{2\pi}{\Phi_0} B w$$

$$\Phi_B = BS = B 2dw \Rightarrow Bw = \frac{\Phi_B}{2d} \quad \text{donc} \quad \Delta \phi = \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi_B$$

$$[11] \quad j_s(y) = j_c \sin\left(2d \frac{2\pi}{\Phi_0} B \left(y + \frac{w}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad 2dwB = \frac{\Phi_0}{2} \Rightarrow 2dB = \frac{\Phi_0}{2w}$$

$$j_s(y) = j_c \sin\left(2\pi \frac{y + \frac{w}{2}}{2w}\right) = j_c \sin\left(2\pi \frac{y}{2w} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \lambda = 2w$$

$$\text{Pour } \Phi_B = \Phi_0, \quad j_s = j_c \sin\left(2\pi \frac{y}{w} + \pi\right) = -j_c \sin\left(2\pi \frac{y}{w}\right) \Rightarrow \lambda = w$$



Pour $\Phi_B = m \Phi_0$, $\lambda = \frac{w}{m}$, il y a un nombre entier de périodes spatiales

$$\text{donc} \quad \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} j_s(y) dy = 0.$$

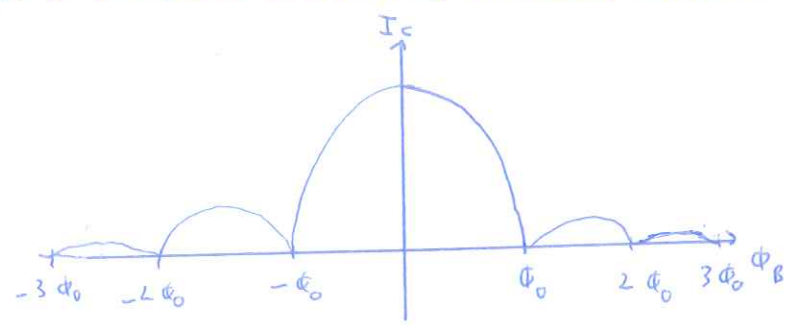
$$[12] \quad I_s = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \left[j_c \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\Phi_B}{w} \left(y + \frac{w}{2}\right) + \phi\left(-\frac{w}{2}\right)\right) \right] dy = j_c \frac{\Phi_0 w}{2\pi \Phi_B} \left[-\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\Phi_B}{w} \left(y + \frac{w}{2}\right) + \phi\left(-\frac{w}{2}\right)\right) \right]_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}$$

$$I_s = j_c \frac{\Phi_0 w}{2\pi \Phi_B} \left(-\cos\left(\frac{2\pi \Phi_B}{\Phi_0} + \phi\left(-\frac{w}{2}\right)\right) + \cos\left(\phi\left(-\frac{w}{2}\right)\right) \right)$$

$$I_s = j_c w \frac{1}{\frac{2\pi \Phi_B}{\Phi_0}} \left(+2 \sin\left(\frac{\pi \Phi_B}{\Phi_0} + \underbrace{\phi\left(-\frac{w}{2}\right)}_{\substack{\text{on fait varier } \phi \text{ par } \Phi_B \Rightarrow \text{le sinus} \\ \text{vaux } \pm 1}}\right) \sin\left(\frac{\pi \Phi_B}{\Phi_0}\right) \right)$$

$$I_c(\Phi_B) = j_c w \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi \Phi_B}{\Phi_0}\right)}{\frac{\pi \Phi_B}{\Phi_0}} \right|$$

[13] Il s'agit d'un sinus cardinal en valeur absolue.



$$\begin{aligned}
 [14] \quad I_c(\phi_B) &= \max_{\phi_1} \left(I_{c,10} \sin \phi_1 + I_{c,10} \sin \phi_2 \right) = \max_{\phi_1} \left[I_{c,10} \left(\sin \phi_1 + \sin \left(\phi_1 + \frac{2\pi \phi_B}{\phi_0} \right) \right) \right] \\
 &= \max_{\phi_1} \left[2 I_{c,10} \sin \left(\frac{\pi \phi_B}{\phi_0} + \phi_1 \right) \cos \left(\frac{\pi \phi_B}{\phi_0} \right) \right] \\
 I_c(\phi_B) &= 2 I_{c,10} \left| \cos \left(\frac{\pi \phi_B}{\phi_0} \right) \right|
 \end{aligned}$$

$$[15] \quad I_c = \max_{\phi_1} \left(I_{c,11} \sin \phi_1 + I_{s,2}(\phi_2) \right) = \max_{\phi_1} \left(I_{c,11} \sin \phi_1 \right)$$

négligé à l'ordre 0

le maximum est atteint par $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$, et $I_c = I_{c,11}$.

$$[16] \quad I_c = I_{c,11} \sin \phi_{c,1} + I_{s,2} \left(\phi_{c,1} + \frac{2\pi \phi_B}{\phi_0} \right) \text{ par définition.}$$

En remplaçant $\phi_{c,1}$ par son ordre 0 on obtient la perturbation de I_c :

$$I_c(\phi_B) = I_{c,11} + I_{s,2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi \phi_B}{\phi_0} \right)$$

Par la phase, faisons varier ϕ_1 autour de $\frac{\pi}{2}$ pour maximiser $I_{s,1} + I_{s,2}$.

$$\frac{\partial}{\partial \phi_1} \left(I_{c,11} \sin \phi_1 + I_{s,2} \left(\phi_1 + \frac{2\pi \phi_B}{\phi_0} \right) \right) = 0 \text{ par } \phi_1 = \phi_{c,1}$$

$$I_{c,11} \cos(\phi_{c,1}) + \frac{\partial I_{s,2}}{\partial \phi_2} \Big|_{\phi_2 = \phi_{c,1} + \frac{2\pi \phi_B}{\phi_0}} = 0 \text{ et } \phi_{c,1} = \frac{\pi}{2} + \gamma \phi_1^{(1)}$$

$$I_{c,11} \underbrace{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \phi_1^{(1)} \right)}_{= -\sin(\gamma \phi_1^{(1)})} + \frac{\partial I_{s,2}}{\partial \phi_2} \Big|_{\phi_2 = \frac{\pi}{2} + \gamma \phi_1^{(1)} + \frac{2\pi \phi_B}{\phi_0}} = 0$$

$$\text{à l'ordre 1, } -I_{c,11} \gamma \phi_1^{(1)} + \frac{\partial I_{s,2}}{\partial \phi_2} \Big|_{\phi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi \phi_B}{\phi_0}} = 0$$

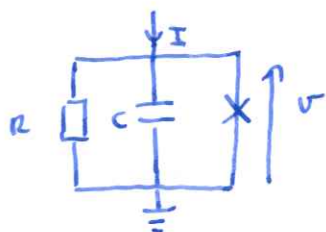
$$\Rightarrow \gamma \phi_1^{(1)} = \frac{1}{I_{c,11}} \frac{\partial I_{s,2}}{\partial \phi_2} \Big|_{\phi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi \phi_B}{\phi_0}}$$

[17] On remarque que les différentes courbes ont une période de 1: l'intensité critique $I_c(\Phi_0)$ est Φ_0 périodique, d'où le nom de fonction Φ_0 .

$I_{S,2}(0)$ est liée par $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi\Phi_0}{\Phi_0} = 0 \Rightarrow \Phi_0 = -\frac{1}{4}\Phi_0$, ce qui correspond à $\Phi_0 = \frac{3}{4}\Phi_0$ avec la périodicité.

On voit alors que $I_{S,2}(0)$ dépend de E_{ext} . Elle correspond au maximum de $I_{S,2}$ par E_{ext} faible, puis elle correspond à peu près à la valeur moyenne de $I_{S,2}$ lorsque E_{ext} est le plus grand.

[18]



La loi des mailles donne:

$$I = \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt} + I_c \sin \phi$$

De plus, $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}$

$$\Rightarrow V = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

donc
$$I = \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{C\hbar}{2e} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + I_c \sin \phi$$

[19] Sous forme canonique:

Equation méca:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{RC} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (I_c \sin \phi - I) \frac{2e}{C\hbar} = 0$$

$$m\ddot{\phi} = -k\phi - \frac{dU}{d\phi}$$

L'analogie mécanique mène à l'identification $\frac{1}{RC} = \frac{\hbar}{m}$

$$\Rightarrow m = RC\hbar = RC \frac{\hbar^4}{4e^2 R} = \frac{C\hbar^4}{4e^2}$$

$$\text{et } \frac{1}{m} \frac{dU}{d\phi} = (I_c \sin \phi - I) \frac{2e}{C\hbar} \Rightarrow U(\phi) = \frac{2em}{C\hbar} \left(-I\phi - I_c \cos \phi \right) + \text{cte}$$

$$U(\phi) = -\frac{2e}{C\hbar} \frac{C\hbar^4}{4e^2} \left(I\phi + I_c \cos \phi \right) + \text{cte} = -\frac{\hbar}{2e} I_c \cos \phi - \frac{\hbar}{2e} I\phi + \text{cte}$$

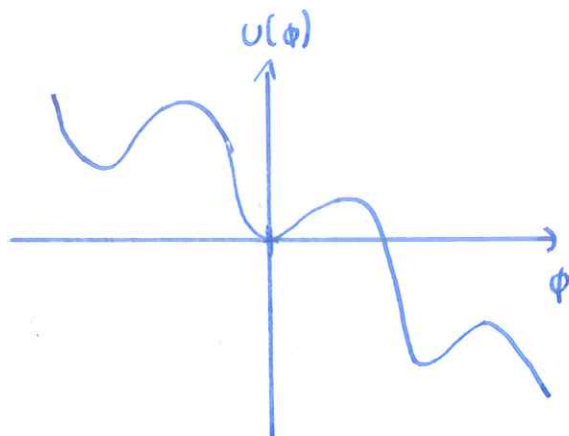
On en avait question [8], $E_J(\phi) = E_c (1 - \cos \phi) = \frac{\hbar I_c}{2e} (1 - \cos \phi)$

On peut donc, en fixant $U(0) = 0$, mettre $U(\phi)$ sous la forme

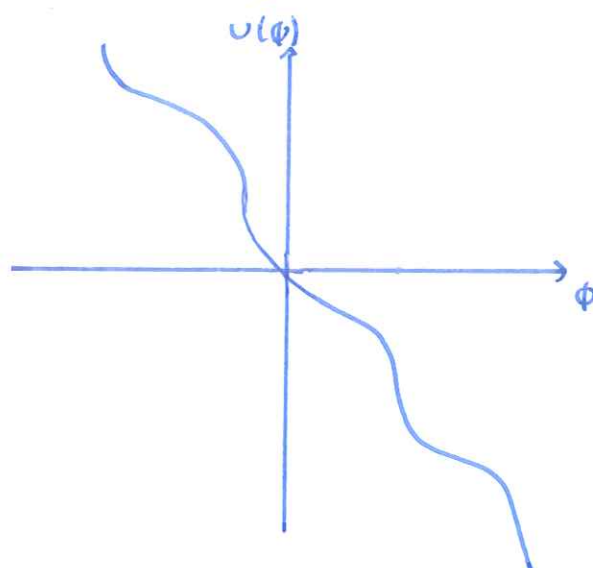
$$U(\phi) = E_J(\phi) - \frac{\hbar}{2e} I\phi = E_J(\phi) - \frac{E_c}{I_c} I\phi$$

[20] $U(\phi) = E_c \left(1 - \cos \phi - \frac{I}{I_c} \phi \right)$

$0 < I < I_c$



$I > I_c$



[21] Pour $I = 0$, $U = E_J = E_c (1 - \cos \phi)$

les positions d'équilibre stables sont $\phi_m = 2m\pi$.

L'analogie mécanique permet d'identifier une raideur équivalente au voisinage de $\phi = 0$.

$$m \ddot{\phi} = - \frac{dU}{d\phi} = - E_c \sin \phi \approx - E_c \phi$$

$$\ddot{\phi} + \frac{E_c}{m} \phi = 0$$

$$\text{Fréquence: } \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_c}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar I_c}{2e} \frac{4e^2}{c \hbar^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2e I_c}{c \hbar}}$$

[22] Pour $R \neq 0$, le frottement est non nul $\Rightarrow \phi$ se fixe sur l'une des positions d'équilibre, donc $V = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$. La caractéristique $I - \langle V \rangle$ est verticale (résistance nulle).

[23] Comme $C=0$, $I = \frac{V}{R} + I_c \sin \phi \Rightarrow V = R(I - I_c \sin \phi)$

Pour $I \gg I_c$, $V \approx RI \approx \text{cte}$. $U(\phi)$ est proche d'une droite décroissante.

Pour $I \approx I_c^+$, $V \approx RI(1 - \sin \phi)$. $U(\phi)$ a une allure en marche d'escalier.

Une particule qui suit ces marches a une vitesse qui augmente, mais l'augmentation

n'est pas régulière. V est un signal périodique

(1-1)

[24] Pour $I \gg I_c$, vu qu'on obtient $V = RI$, on peut en conclure que la majeure partie du courant passe dans la résistance.

[25] Avec $C = 0$, l'équation différentielle sur ϕ devient

$$I = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\phi}{dt} + I_c \sin \phi \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \left(I - I_c \sin \phi \right) \frac{2eR}{\hbar}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{d\phi}{I - I_c \sin \phi} \frac{\hbar}{2eR}$$

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{I - I_c \sin \phi} \frac{\hbar}{2eR} = \frac{\hbar}{2eRI_c} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\frac{I}{I_c} - \sin \phi} = \frac{\hbar}{2eRI_c} \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1}}$$

$$T = \frac{\hbar}{2eR} \frac{1}{\sqrt{I^2 - I_c^2}}$$

$$[26] \quad \langle V \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt} dt = \frac{\hbar}{2eT} [\phi(T) - \phi(0)]$$

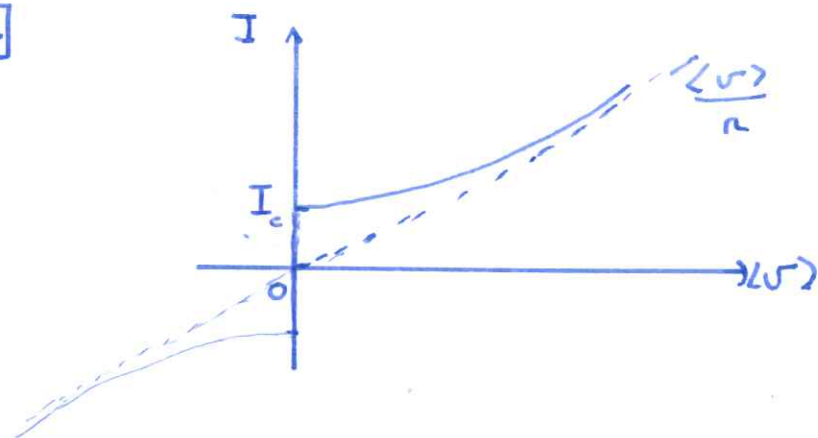
$$\langle V \rangle = \frac{2\pi\hbar}{2eT} = \frac{h}{2eT}$$

La fréquence Josephson a pour expression $\nu_J = \frac{e}{h} V = \frac{2e}{h} V$ par $V = d\phi/dt$ l'expression est donc compatible.

Pour $I > I_c$, on peut remplacer T .

$$\langle V \rangle = R \sqrt{I^2 - I_c^2}$$

[27]



$$\langle V \rangle^2 = R^2 (I^2 - I_c^2)$$

$$\Rightarrow I^2 = I_c^2 + \frac{\langle V \rangle^2}{R^2}$$

$$I = \sqrt{I_c^2 + \frac{\langle V \rangle^2}{R^2}}$$

[28] Par $\langle v \rangle = 6 \mu V$, $\beta_J = \frac{2e}{h} 6 \mu V = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6 \cdot 10^{-34}} 6 \mu V = 2 \times 1,6 \cdot 10^{-19-6+34}$
 $\beta_J = 3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$

$\beta_d = 3 \text{ GHz}$ fixé, on fait varier $\langle v \rangle$ et donc β_J . Lorsque β_J correspond à β_d un pic est détecté.

[29] Par la figure 6, le pic est observé pour une tension double.

La relation courant phase $I = I_c \sin \phi$ est remplacé par $I = I_c \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$?

d'où le nom d'effet Josephson fractionnaire.

[30] Si on reprend la question [26] en régime de verrouillage de phase, on

obtient $\langle v \rangle = \frac{\hbar}{2eT} (\phi(T) - \phi(0)) = \frac{\hbar 2\pi n}{2eT} = \frac{n\hbar}{2eT} = n \frac{hf}{2e} = n \Delta V$.

Si $\langle v \rangle = n \Delta V$, ϕ augmente de $2\pi n$ en une période $\Rightarrow$ la particule fictive se déplace de n puits de potentiel (elle descend les marches de la question [20])

[31] Equation RSJ: $I = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\phi}{dt} + I_c \sin \phi$

$$I_{dc} + I_{ac} \sin(2\pi \beta t) = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\phi}{dt} + I_c \sin \phi$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar}{2eRI_c} \frac{d\phi}{dt} + \sin \phi = \frac{I_{dc}}{I_c} + \frac{I_{ac}}{I_c} \sin(2\pi \beta t)$$

En posant $\tau = \frac{\hbar}{2eRI_c}$ et $\xi \tau = 2\pi \beta t \Rightarrow \xi = \frac{2\pi \beta \tau}{\tau} = \frac{2\pi \beta \hbar}{2eRI_c}$

$$\xi = \frac{\beta \hbar}{2eRI_c}, \text{ on obtient (13)}$$

[32] Si $R \ll 2\pi \beta L_J$, l'essentiel du courant passe par la résistance.

Le courant passant par la jonction étant nul, on peut supposer que cela limite les non linéarités et supposer $\langle v \rangle$ sinusoïdale ?

[33] Equation (13) $\frac{d\phi}{d\tau} + \sin \phi = i_{dc} + i_{ac} \sin(\xi \tau)$

On remplace $\phi = \phi_0 + \langle v \rangle \tau + \frac{v_0}{\xi} \sin(\xi \tau + \theta)$

$$\Rightarrow \langle v \rangle + v_0 \cos(\xi \tau + \theta) + \sin\left(\phi_0 + \langle v \rangle \tau + \frac{v_0}{\xi} \sin(\xi \tau + \theta)\right) = i_{dc} + i_{ac} \sin(\xi \tau)$$

On a
$$\sin\left(\phi_0 + \langle v \rangle \tau + \frac{v_0}{\xi} \sin(\xi \tau + \theta)\right) = \sum_m J_m\left(\frac{v_0}{\xi}\right) \sin(\phi_0 + \langle v \rangle \tau + m(\xi \tau + \theta))$$

$$\Rightarrow \sin\left(\phi_0 + \langle v \rangle \tau + \frac{v_0}{\xi} \sin(\xi \tau + \theta)\right) = \sum_m J_m\left(\frac{v_0}{\xi}\right) \sin(\phi_0 + \langle v \rangle \tau + m(\xi \tau + \theta))$$

Au final, $\langle v \rangle + v_0 \cos(\xi \tau + \theta) + \sum_m J_m\left(\frac{v_0}{\xi}\right) \sin(\phi_0 + \langle v \rangle \tau + m(\xi \tau + \theta)) = i_{dc} + i_{ac} \sin(\xi \tau)$

[34] La valeur moyenne temporelle donne à priori $\langle v \rangle = i_{dc}$

$$\frac{\langle v \rangle}{R I_c} = \frac{I_{dc}}{I_c} \Rightarrow \langle v \rangle = R I_{dc}$$

Mais, supposons que $\langle v \rangle = m_0 \Delta v = m_0 \frac{h\phi}{2e}$. Alors $\langle v \rangle = \frac{\langle v \rangle}{R I_c} = m \xi$

Il y a alors le terme $m = -m_0$ qui devient indépendant de τ . La valeur

moyenne devient $\langle v \rangle + J_{-m_0}\left(\frac{v_0}{\xi}\right) \sin(\phi_0 - m_0 \theta) = i_{dc}$

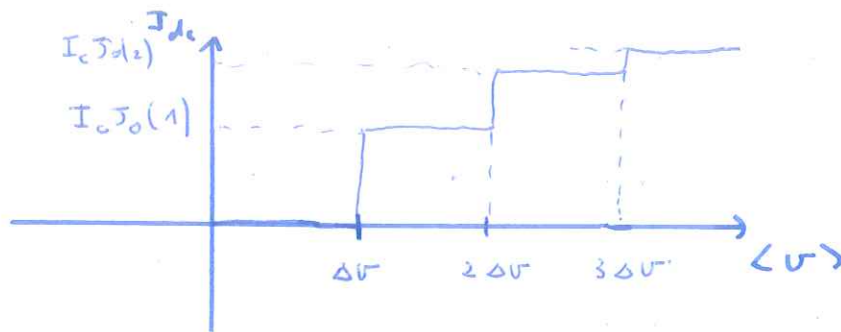
$$\Rightarrow \langle v \rangle = R I_{dc} + R I_c (-1)^{m_0} J_{m_0}\left(\frac{2e R I_c v_0}{h\phi}\right) \sin(\phi_0 - m_0 \theta)$$

[35] $\langle v \rangle = m \Delta v = R I_{dc} + R I_c (-1)^m J_m\left(\frac{2e R I_c v_0}{h\phi}\right) \sin(\phi_0 - m_0 \theta)$

v_0 est fixe car I_{ac} l'est. Restent ϕ_0 et θ qui peuvent s'adopter dans la mesure où $m \Delta v - R I_c J_m\left(\frac{2e R I_c v_0}{h\phi}\right) < R I_{dc} < m \Delta v + R I_c J_m\left(\frac{2e R I_c v_0}{h\phi}\right)$

[36] Par $2e R I_c v_0 = h\phi$, $I_{dc} = \frac{\langle v \rangle}{R} - (-1)^m J_m(1) \sin(\phi_0 - m_0 \theta)$

Si I_{dc} sort de l'intervalle, on change de valeur de m , d'où les marches.



La largeur des marches est de plus en plus fine.

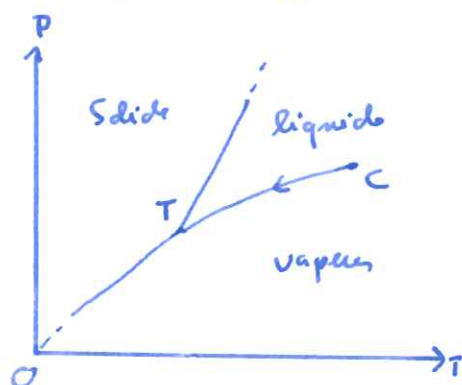
<37> Dans le cas d'un effet Josephson fractionnaire, la fréquence β_J est, par exemple, doublée. Or $\beta_J \propto \langle U \rangle$, donc la taille des marches doit être doublée également.

<38> Abcisse et ordonnée sont inversées. Sur l'axe des ordonnées, $\Delta U = \frac{h\phi}{2e}$ est indiqué. L'effet Josephson fractionnaire concerne donc l'axe vertical.

La courbe obtenue à plus haute fréquence descend assez systématiquement 2 marches d'un coup (plus que les autres). La taille des paliers horizontaux est variable. Elle est liée aux fonctions de Bessel.

Problème 2: Réfrigérateurs à dilution

[39] Allure du diagramme (P, T) d'un corps pur.



Le bain d'Hélium 4 est à l'équilibre liquide-vapeur, et on fait baisser la pression en maintenant cet équilibre, donc T diminue.

[40] Un bilan d'énergie appliqué au bain d'Hélium donne

$$dH = -L_4 dm = m C_4 dT \Rightarrow dm = -m \frac{C_4}{L_4} dT, \text{ avec } dm > 0 \text{ la quantité vaporisée et } dT < 0 \text{ car } T \text{ décroît.}$$

car on a avec m quantité d'Hélium dans le bain.

$$[41] \text{ On a } \frac{1}{m} \frac{dm}{dT} + \frac{C_4}{L_4} = 0 \Rightarrow m = A e^{-\frac{C_4}{L_4} T}. \text{ En } m_0 = A e^{-\frac{C_4}{L_4} T_4}$$

$$\text{donc } m(T) = m_0 e^{-\frac{C_4}{L_4} (T_4 - T)}$$

$$\text{AN: } \frac{m}{m_0} = e^{-\frac{12}{92} \cdot 3,2} = e^{-0,4} = (1,5)^{-1} = \frac{2}{3}.$$

$$[42] d\mu_L = -s_4^L dT + v_4^L dP \quad d\mu_G = -s_4^G dT + v_4^G dP$$

L'équilibre liquide-vapeur entraîne $d\mu_L = d\mu_G$, et $P = P_s(T)$

$$\Rightarrow (v_4^L - v_4^G) dP_s = (s_4^L - s_4^G) dT$$

$$v_4^G \gg v_4^L \Rightarrow v_4^G dP_s = (s_4^G - s_4^L) dT = \frac{L_4}{T} dT$$

$$\Rightarrow \frac{dP_s}{dT} = \frac{L_4}{T v_4^G}$$

$$[43] \text{ Relation des gaz parfaits à la phase vapeur: } P v_4^G = RT \Rightarrow v_4^G = \frac{RT}{P_s}$$

$$\text{A l'équilibre de phase: } \frac{dP}{dT} = \frac{L_4 P}{RT^2} \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{L_4}{R} \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{L_4}{R} \left(-\frac{1}{T} + \frac{1}{T_4}\right)$$

$$P(T) = P_0 e^{\frac{L_4}{R} \left(\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T}\right)}$$

[44] En régime permanent, T et P ne dépendent pas du temps (ou très lentement)

$$V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow D_v = \dot{m} \frac{RT}{P} \Rightarrow \dot{m} = \frac{P}{RT} D_v \Rightarrow m \text{ proportionnel à } P(T) = P_s(T).$$

[45] La puissance en jeu est $P_{th} = L_4 \dot{m} = L_4 \frac{P(T)}{RT} D_V$

Si T diminue, $P(T)$ diminue et RT aussi, il faut donc dériver pour savoir.

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{P(T)}{T} \right) = \frac{dP}{dT} \cdot \frac{1}{T} - \frac{P}{T^2} = \frac{L_4}{RT^2} \frac{P}{T} - \frac{P}{T^2} = \frac{P}{T^2} \left(\frac{L_4}{RT} - 1 \right)$$

> 0 car $L_4 = 92 \text{ J/mol}$
et $RT < 8,3 \cdot 4,2 = 32 \text{ J/mol}$.

Donc P_{th} diminue lorsque T diminue, ce qui suggère une limite à cette méthode de refroidissement.

[46] $P_{lim} = 100 \text{ Pa}$

$$-\frac{1}{T_{lim}} + \frac{1}{T_4} = \frac{R}{L_4} \ln \left(\frac{P_{lim}}{P_0} \right) \Rightarrow T_{lim} = \frac{1}{\frac{1}{T_4} - \frac{R}{L_4} \ln \left(\frac{P_{lim}}{P_0} \right)}$$

AN: $T_{lim} = \frac{1}{\frac{1}{4,2} - \frac{8,3}{92} \ln(10^{-3})} = \frac{1}{\frac{1}{4,2} + \frac{8,3}{92} \cdot 7} = 1,15 \text{ K}$ d'où le max de P est 1 K.

En pompant d'avantage, on pourrait diminuer, mais cela ne dépasserait pas de beaucoup le Kelvin. (0,95 K par $P_{lim} = 10 \text{ Pa}$)

[47] Avec de l'Hélium 3, $T_{lim} = \frac{1}{\frac{1}{T_3} - \frac{R}{L_3} \ln 10^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{3,2} + \frac{8,3}{2,1} \cdot 7} = 0,3 \text{ K}$ donc c'est mieux, mais + cher.

[48] D'après la figure 9, le point $x_3 = 0,2$ et $T = 1 \text{ K}$ est dans la zone superfluide.

[49] Lorsque ce mélange est refroidi, il devient diphasé: superfluide et liquide normal. La phase liquide normale est composée d'Hélium 3 pur et la phase superfluide a un titre autour de 0,06 en Hélium 3 (phase diluée)

[50] $dU_M = dU_{M, \text{diluée}} + dU_{M, \text{pure}}^{\text{H}_2}$

0 car $dU_M = dU_{M, \text{diluée}} + dU_{M, \text{pure}} = 0$

$$= T_M dS_{M, \text{diluée}} - P_M dV_{M, \text{diluée}} + \mu_{3, \text{diluée}} dm_{3, \text{diluée}} + \mu_{4, \text{diluée}} dm_{4, \text{diluée}}$$

← superfluide

$$+ T_M dS_{M, \text{pure}} - P_M dV_{M, \text{pure}} + \mu_{3, \text{pure}} dm_{3, \text{pure}}$$

← échanges négligés avec d

0 pas d'échanges avec d

Au final il reste $dU_M = \mu_{4,M}(T_M, P_M) dm_{4,M}$

De même on peut obtenir $dU_B = \mu_{4,B}(T_B, P_B) dm_{4,B}$

Comme la phase diluée est fermée, $dm_{4,M} + dm_{4,B} = 0$

[S1] A l'équilibre on peut supposer $dU_M + dU_B = 0$ sur un cycle fermé, d'où

$$(\mu_{4,M}(T_M, P_M) - \mu_{4,B}(T_B, P_B)) dm_{4,M} = 0$$

$$\text{et } \mu_{4,M}(T_M, P_M) = \mu_{4,B}(T_B, P_B)$$

$$[S2] \quad \mu_{4,M} = \mu_4^0(T_M, P_M) + RT_M \ln(1 - x_{3,M}) \simeq \mu_4^0(T_M, P_M) - RT_M x_{3,M}$$

$$\mu_{4,B} = \mu_4^0(T_B, P_B) + RT_B \ln(1 - x_{3,B}) \simeq \mu_4^0(T_B, P_B) - RT_B x_{3,B}$$

$$[S3] \quad dp = -s dT + \nu dp$$

$$\text{d'où } -s = \frac{\partial \mu}{\partial T} \Big|_P \quad \text{et } \nu = \frac{\partial \mu}{\partial P} \Big|_T$$

$$\text{donc } \frac{\partial \mu_4^0}{\partial P} \Big|_T = -s_4^0 \quad \text{et } \frac{\partial \mu_4^0}{\partial T} \Big|_P = +\nu_4^0$$

$$[S4] \quad \mu_{4,M} - \mu_{4,B} = \underbrace{-s_4^0}_{\text{en phase superfluide}} (T_M - T_B) + \nu_4^0 (P_M - P_B)$$

$$\mu_{4,M} = \mu_{4,B} \Rightarrow \mu_{4,M} - \mu_{4,B} = R(T_M x_{3,M} - T_B x_{3,B})$$

$$\Rightarrow \pi = \frac{R}{\nu_4^0} (T_M x_{3,M} - T_B x_{3,B})$$

[S5] Si aucun atome n'est pompé dans le bocal, on a à l'équilibre

$$\pi = 0 \Rightarrow T_M x_{3,M} = T_B x_{3,B} \Rightarrow x_{3,B} = x_{3,M} \frac{T_M}{T_B} \simeq 0,06 \cdot \frac{10}{700} \simeq 9 \cdot 10^{-4}$$

et non $9 \cdot 10^{-3} \dots$

mais si on prend les 100 mK de la question suivante ça marche.

[56] Si tous les atomes d'Hélium 3 sont extraits du boudoir, $x_{3,B} = 0$,

$$\Pi = \Pi_{\max} = \frac{R}{N_4^5} (T_M x_{3,M})$$

$$[57] \quad \Pi_{\max} = \frac{8,13 \cdot 0,1 \cdot 0,06}{27,6 \cdot 10^{-6}} = 1800 \text{ Pa.}$$

$$P_{\text{colonne}} = \rho g h. \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m M}{V} = \frac{M}{N_{\text{molecs}}}$$

$$= \frac{M_4 g h}{N_4^5} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 50 \cdot 10^{-2}}{27,6 \cdot 10^{-6}} = 724 \text{ Pa}$$

La pression osmotique peut donc vaincre la pression hydrostatique.

[58] La dilution se fait de façon permanente dans la chambre de mélange, le refroidissement est donc permanent, contrairement au cas du pot à 1 K où il s'agirait d'un déplacement d'équilibre.

[59] Le premier principe appliqué à Σ entre t et $t + dt$ donne

$$dH = \mathcal{P}_{\text{ext},M} dt \quad dt = \delta H_{\text{sortant}} - \delta H_{\text{entrant}} \text{ cas régime stationnaire.}$$

$$\dot{m}_3 H_{3,d}(T_M) - \dot{m}_3 H_3(T_E) = \mathcal{P}_{\text{ext},M}$$

[60] Avec les relations données, on obtient

$$\mathcal{P}_{\text{ext},M} + \dot{m}_3 h_3 T_E^2 = \dot{m}_3 h_{3,d} T_M^2 \quad , \text{ avec } T_M = T_E$$

$$\mathcal{P}_{\text{ext},M} = \dot{m}_3 T_M^2 (h_{3,d} - h_3)$$

$$[61] \quad T_M^2 = \frac{\mathcal{P}_{\text{ext},M}}{\dot{m}_3 (h_{3,d} - h_3)} = \frac{0,3 \cdot 10^{-6}}{30 \cdot 10^{-6} (96 - 12)} = \frac{10^{-2}}{84} \approx 1,2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow T_M = 10^{-2} \text{ K} \approx 10 \text{ mK.}$$

[62] Par $\mathcal{P}_{\text{ext},M} = 0$ et $T_E \neq T_M$, on obtient $h_3 T_E^2 = h_{3,d} T_M^2$. T_M est donc directement liée à T_E , qu'il faut donc minimiser.

[63] Premier principe appliqué au baffle :

$$dH = P_{ext,B} dt.$$

$$dH = \underbrace{\dot{S}H_{sortant} - \dot{S}H_{entrant}}_{\text{perte par refroidissement}} + \underbrace{L_{3,d} \dot{m}_3}_{\text{vaporisation}} dt$$

$$dH = \dot{m}_3 dt (H_3(T_B) - H_3(T_P))$$

$$\Rightarrow \dot{m}_3 (H_3(T_B) - H_3(T_P) + L_{3,d}) = P_{ext,B}$$

[64] $P_{ext,B} = \dot{m}_3 (c_3(T_B - T_P) + L_{3,d})$ On peut supposer que $c_3 \approx c_4$.

$$\approx 30 \cdot 10^{-6} (12 \cdot 1,3 + 31) = 1,3 \text{ mW} \gg P_{ext,u} = 93 \mu\text{W}.$$