

Vie et mort d'un photon

Mohamed Afekir (cpgeafek@gmail.com)

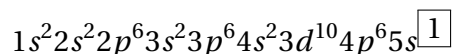
École Royale de l'Air

CPGE - Marrakech

I Étude des atomes de Rydberg circulaires

I.A - Préliminaires

Q 1. Structure électronique du Rubidium



Le Rubidium appartient à la famille des alcalins.

Q 2. L'interaction entre le noyau et l'électron est de type électrostatique attractive.

Q 3. Autre l'électron de la couche électronique la plus énergétique, le système est constitué de Z nucléons (*noyau*) et des $(Z - 1)$ autres électrons:

- pour $r \rightarrow 0$; la seule charge à prendre en compte est celle du noyau:

$$Z(r)e = Ze \quad \text{ou} \quad Z(r) = Z$$

- pour $r \rightarrow \infty$; l'électron e^- ne voit plus qu'une charge effective (*effet d'écran*):

$$Z(r)e = \left(\underbrace{Z}_{\text{système avec } e^-} - \underbrace{(Z-1)}_{\text{système sans } e^-} \right) e = e \quad \text{ou} \quad Z(r) = 1$$

Soient:

$$U(r \rightarrow 0) = -\frac{Zq}{r} \quad \text{et} \quad U(r \rightarrow \infty) = -\frac{q}{r} \quad (1)$$

Q 4. $a_o = \hbar^\alpha q^\beta m_e^\gamma$, avec a_o est une distance, elle s'exprime en m

$$q = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} \quad \text{et} \quad f_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r^2} \quad \Rightarrow \quad q \propto r^2 \times f_e \quad \text{en} \quad \text{kg.m}^3.\text{s}^{-2}$$

L'analyse au dimensions permet d'écrire; avec $\hbar$ s'exprime en $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$:

$$L = \underbrace{M^\alpha L^{2\alpha} T^{-\alpha}}_{\hbar^\alpha} \times \underbrace{M^\beta L^{3\beta} T^{-2\beta}}_{q^\beta} \times \underbrace{M^\gamma}_{m_e^\gamma}$$

soient:

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha + 3\beta \\ -\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2 \quad ; \quad \beta = -1 \quad \text{et} \quad \gamma = -1 \quad \text{ou} \quad a_o = \frac{\hbar^2}{qm_e} = \frac{4\pi\epsilon_o \hbar^2}{m_e e^2} = 0,53 \text{ \AA}$$

I.B - Atomes de Rydberg**I.B.1) Étude classique**

Q 5. $r \propto n$ et $n \gg 1 \Rightarrow Z(r) = 1$ (voir **Q 3.**); d'où:

$$U = -\frac{q}{r}$$

Q 6. Le théorème du moment cinétique appliqué à l'électron dans le repère barycentrique d'origine 0:

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{r} \wedge \vec{f}_e = -\vec{r} \wedge \overrightarrow{\text{grad}U} = q\vec{r} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0}$$

$\vec{\mathcal{L}}$ est, alors un vecteur constant; donc le mouvement de l'électron est plan. Le plan du mouvement est un plan perpendiculaire à $\vec{\mathcal{L}}$.

si $\vec{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\vec{e}_z$, le plan du mouvement est perpendiculaire à $\vec{e}_z$, soit le plan (Oxy).

$$\vec{\mathcal{L}} = m_e \vec{r} \wedge \vec{v} = m_e r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \mathcal{L} = m_e r^2 \dot{\varphi}$$

Q 7. L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'électron est conservative.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{q}{r} = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{q}{r} = \frac{1}{2} m_e \left(\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{r^2 m_e^2} \right) - \frac{q}{r} = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2}}_{\mathcal{E}_{p,eff}(r)} - \frac{q}{r}$$

$$\mathcal{E}_{p,eff}(r) = \frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{q}{r}$$

Q 8. Pour une trajectoire circulaire: $r = r_o$ et $\dot{r} = 0$;

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,eff}(r) = \frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{q}{r} \quad \Rightarrow \quad 2m_e \mathcal{E}_m r^2 + 2m_e q r - \mathcal{L}^2 = 0$$

solution:

$$r_o = -\frac{q}{2\mathcal{E}_m} \quad \text{avec} \quad \Delta_r' = m_e(m_e q^2 + 2\mathcal{L}^2 \mathcal{E}_m) = 0 \quad \text{ou} \quad m_e q = \frac{\mathcal{L}^2}{r_o}$$

d'autre part:

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_{p,eff}}{dr} \right)_{r_o} = -\frac{\mathcal{L}^2}{m_e r_o^3} + \frac{q}{r_o^2} = \frac{1}{m_e r_o^2} \left(-\frac{\mathcal{L}^2}{r_o} + m_e q \right) = 0 \quad \text{donc} \quad \mathcal{E}_{p,eff} \text{ présente un extrémum en } r_o$$

En plus:

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{E}_{p,eff} = \infty \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{p,eff} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{p,eff}(r) \text{ pourra s'annuler, donc, elle change de signe}$$

L'extremum est, alors, un *minimum*. Le rayon r_C de l'électron sur la trajectoire circulaire est tel que $r_C = r_o = \frac{\mathcal{L}^2}{qm_e}$. D'après la question **Q 4.** ; $a_o = \frac{\hbar^2}{qm_e}$:

$$qm_e = \frac{a_o}{\hbar^2} = \frac{r_C}{\mathcal{L}^2} \quad \Rightarrow \quad r_C = \frac{\mathcal{L}^2}{\hbar^2} a_o$$

I.B.2) Étude quantique

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m_e} \Delta \Psi - \frac{q}{r} \Psi \quad (2)$$

Q 9. On remplace $\Psi(M, t) = \Phi(M)\chi(t)$ dans l'équation (2):

$$i\hbar \Phi \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m_e} \chi \Delta \Phi - \frac{q}{r} \Phi \chi \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{i\hbar \partial \chi}{\chi \partial t}}_{F(t)} = \underbrace{\frac{-\hbar^2 \Delta \Phi}{2m_e \Phi} - \frac{q}{r}}_{G(M)}$$

$F(t) = G(M)$ admet une solution si et seulement si $F(t) = G(M) = \text{constante}$; soit:

$$\frac{i\hbar \partial \chi}{\chi \partial t} = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\chi(t)}{dt} = -i \frac{\mathcal{E}}{\hbar} \quad \Rightarrow \quad \chi(t) = A \exp\left(-i \frac{\mathcal{E}}{\hbar} t\right)$$

Q 10. L'électron est dans un état lié

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E} < 0$$

Q 11. ℓ : nombre quantique secondaire, il caractérise les sous couches et donne le type d'orbitale atomique accessible par l'électron.

$$0 \leq \ell \leq n - 1$$

Q 12.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{q}{r} = \frac{p_r^2}{2m_e} + \frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{q}{r} \quad \text{et} \quad p_r \mapsto -i\hbar \frac{d}{dr}$$

d'autre part;

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{q}{r} \right) u(r) = \mathcal{E} u(r)$$

par identification on en déduit que:

$$\mathcal{L}^2 = \hbar^2 \ell(\ell+1) \quad \text{ou} \quad \mathcal{L} = \pm \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)}$$

pour l'électron étudier; $n = 50 \gg 1$:

$$\mathcal{L}_{max}^2 = \mathcal{L}^2(\ell = n-1) = n(n-1)\hbar^2$$

Q 13.

$$r_C = \frac{\mathcal{L}^2}{\hbar^2} a_o = a_o \ell(\ell+1)$$

$$\text{pour } \mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_{max}^2 \quad ; \quad r_C = n(n-1)a_o$$

Q 14. On rappelle l'équation vérifiée par $u(r)$:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{q}{r} \right) u(r) = \mathcal{E} u(r)$$

On pose $\rho = r/a_o$ et $\epsilon = -\mathcal{E}/\mathcal{E}_o$;

$$\frac{d}{dr} = \frac{d}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{a_o} \frac{d}{d\rho} \quad , \quad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{a_o^2} \frac{d^2}{d\rho^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\rho a_o}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{a_o^2} \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e \rho^2 a_o^2} - \frac{q}{\rho a_o} \right) u(\rho) = \mathcal{E} u(\rho) \\
& \left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{2m_e q a_o}{\hbar^2 \rho} \right) u(\rho) = \frac{2m_e a_o^2}{\hbar^2} \mathcal{E} u(\rho) \\
& \left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{2m_e q a_o}{\hbar^2 \rho} - \frac{2m_e a_o^2}{\hbar^2} \mathcal{E} \right) u(\rho) = 0 \\
\text{et } a_o = \frac{\hbar^2}{q m_e} & \Rightarrow \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \epsilon \right) u(\rho) = 0 \quad \text{avec} \quad \epsilon = -\frac{2m_e a_o^2}{\hbar^2} \mathcal{E} = -\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_o} \\
& \mathcal{E}_o = \frac{\hbar^2}{2m_e a_o^2} = \frac{q}{2a_o} = 13,6 \text{ eV}
\end{aligned}$$

I.C - Atomes de RYDBERG circulaires

Q 15. La probabilité d^3P de trouver l'électron dans l'élément de volume $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$:

$$d^3P = |\Phi|^2 d\tau = |\Phi|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

La probabilité dP de trouver l'électron entre r et $r + dr$, quel que soit θ et φ : ($0 \leq \varphi \leq \pi$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$)

$$\begin{aligned}
dP = r^2 dr \int_{(\theta)} \int_{(\varphi)} |\Phi|^2 \sin\theta d\theta d\varphi &= A^2(n) r^2 \left(\frac{r}{a_o} \right)^{2(n-1)} \exp\left(-\frac{2r}{na_o}\right) dr \int_{(\theta)} \int_{(\varphi)} (\sin\theta)^{2(n-1)} \sin\theta d\theta d\varphi \\
&= 2\pi A^2(n) r^2 \left(\frac{r}{a_o} \right)^{2(n-1)} \exp\left(-\frac{2r}{na_o}\right) dr \int_{(\theta)} (\sin\theta)^{2n-1} d\theta
\end{aligned}$$

Q 16. La densité de probabilité:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dr} &= A^2(n) r^2 \left(\frac{r}{a_o} \right)^{2(n-1)} \exp\left(-\frac{2r}{na_o}\right) \int_{(\theta)} \int_{(\varphi)} (\sin\theta)^{2n-1} d\theta d\varphi \\
\frac{dP}{dr} &= \underbrace{2\pi A^2(n) r^2 \left(\frac{r}{a_o} \right)^{2(n-1)} \exp\left(-\frac{2r}{na_o}\right)}_{f(r)} \int_{(\theta)} (\sin\theta)^{2n-1} d\theta
\end{aligned}$$

$\frac{dP}{dr}$ est maximale si $f(r) = 2\pi A^2(n) r^2 \left(\frac{r}{a_o} \right)^{2(n-1)} \exp\left(-\frac{2r}{na_o}\right)$ est maximale:

$$\left(\frac{df}{dr} \right)_{r_{max}} = 0 \Leftrightarrow 2nr_{max}^{2n-1} + r_{max}^{2n} \left(\frac{-2}{na_o} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2n}{r_{max}} - \frac{2}{na_o} = 0$$

soit:

$$r_{max} = n^2 a_o$$

Étant donnée que $n \gg 1$; cette orbite, où la densité de probabilité $\frac{dP}{dr}$ est maximale, est beaucoup plus grande que le noyau de l'atome du *Ribidium* qui a un diamètre de l'ordre de a_o et de structure électronique du gaz rare le plus proche ($Z_{gr} = 36$).

Q 17. Application numérique: $r_{max} = 1,33 \times 10^{-7} \text{ m} = 133 \text{ nm}$. Cette valeur est très importante comparée à a_o : les atomes de Rydberg sont, alors, qualifiés d'atomes géants.

Q 18. La dispersion relative de r est telle que $\frac{\Delta r}{r} \simeq \frac{1}{\sqrt{2n}}$: plus n est important (*niveau élevé*) plus $\frac{\Delta r}{r}$ est faible ($\Delta_r(n=50) \approx \frac{r_{max}}{10} 13 \text{ nm}$) et donc, confinement de l'électron autour de l'orbite de Bohr est atteint; d'où le comportement *classique* de l'électron de l'atome de Rydberg.

Q 19. $\rho = r/a_o$

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = A(n) \left(-\frac{r}{a_o} \right)^{n-1} \exp \left(-\frac{r}{na_o} \right) F(\theta, \varphi) = A(n) (-\rho)^{n-1} \exp \left(-\frac{\rho}{n} \right) F(\theta, \varphi) = \frac{u(\rho)}{\rho} F(\theta, \varphi)$$

soit:

$$u(\rho) = K \rho^n \exp \left(-\frac{\rho}{n} \right) \quad \text{où } K \text{ est le facteur multiplicatif près.}$$

On rappelle l'équation vérifiée par $u(\rho)$. Cf. la question **Q 14.** :

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \epsilon \right) u(\rho) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{du(\rho)}{d\rho} &= K \left[n\rho^{n-1} - \frac{\rho^n}{n} \right] \exp \left(-\frac{\rho}{n} \right) = \left[\frac{n}{\rho} - \frac{1}{n} \right] u(\rho) \\ \frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} &= \left[\frac{n(n-1)}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} + \frac{1}{n^2} \right] u(\rho) \end{aligned}$$

soit:

$$\frac{n(n-1)}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} + \frac{1}{n^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \epsilon = 0$$

Pour l'électron le *plus énergétique* $n \gg 1$ et ℓ est *maximum* ($\ell = n-1$): $\frac{n(n-1)}{\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \rightarrow 0$

$$\epsilon = \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = -\frac{\mathcal{E}_o}{n^2}$$

On retrouve le résultat du modèle classique de Bohr ce qui confirme l'hypothèse de la question **Q 18.**

Q 20. Fréquence ν_{at} du photon correspondant à la transition entre les états $\mathcal{E}_{n=50}$ et $\mathcal{E}_{n=51}$:

$$h\nu_{at} = \mathcal{E}_{n=51} - \mathcal{E}_{n=50} = \mathcal{E}_o \left(\frac{1}{50^2} - \frac{1}{51^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \nu_{at} = \frac{\mathcal{E}_o}{h} \frac{101}{50^2 51^2} = 50,97 \text{ GHz}$$

I.D - Détection des atomes de Rydberg circulaires

Q 21. Champ électrique crée par le proton:

$$E_{proton} = \frac{e}{4\pi\epsilon_o d^2} = \frac{1,6 \times 10^{-19}}{4\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^{-20}} \approx 10^{11} \text{ V.m}^{-1}$$

Le champ d'ionisation de l'atome d'hydrogène est tel que:

$$W_i = \frac{1}{2} \epsilon_o E_i^2 \times V_H = +13,6 \text{ eV} \quad \Rightarrow \quad E_i = \sqrt{\frac{6W_i}{4\pi\epsilon_o d^3}} \approx 10^{12} \text{ V.m}^{-1}$$

On peut, donc, assimiler la valeur du champ électrique du proton à celle du champ d'ionisation de l'atome d'hydrogène.

Q 22. On utilise le fait que le résultat précédent est vérifié. L'énergie d'ionisation $\mathcal{E}_i = +\frac{\mathcal{E}_o}{n^2}$ et la densité d'énergie W est proportionnelle au carré du champ électrique E_e ; par conséquent, $E_e \propto \frac{1}{n}$: plus n est élevé, plus le champ est faible.

n	50	51	52
E_e	$1,60 \times 10^4$	$1,48 \times 10^4$	$1,36 \times 10^4$

Q 23. La circulation du champ électrique se fait des potentiels élevés vers les potentiels faible et ce champ est de sens contraire au déplacement des électrons; on a alors:

$$V_f > V_e > V_d > V_c > V_b > V_a$$

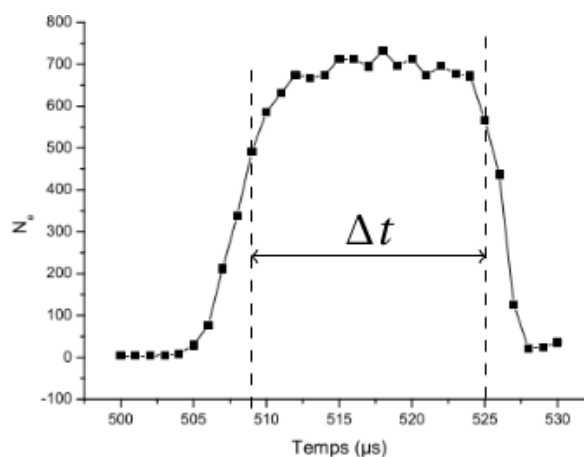
Q 24. Vitesse des atomes de Rydberg

L'électron arraché travers l'électrode b qui est percée d'un diaphragme D :

$$D = 6 \text{ mm}$$

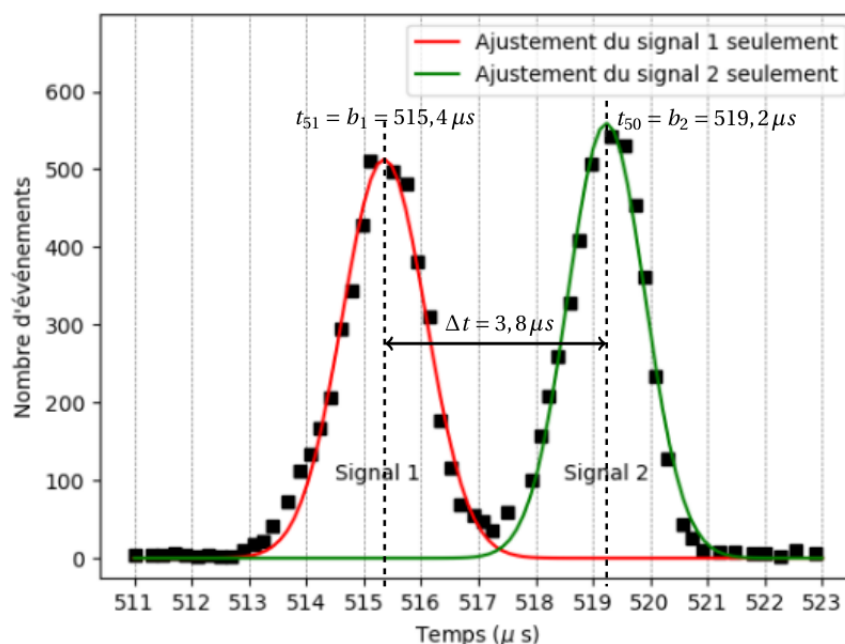
$$\Delta t \simeq 525 - 508.75 = 16,25 \mu\text{s}$$

$$v_{at} = \frac{D}{\Delta t} \approx 369 \text{ m.s}^{-1}$$



Q 25. L'instant de déclenchement t_o est la constante K .

$E_{c,50}$ et $E_{c,51}$ désignent les champs d'ionisation des états de RYDBERG circulaires $n = 50$ et $n = 51$ respectives (avec $E_{c,50} > E_{c,51}$ d'après la question **Q 22.**).



La variation de $V_a(t)$ suit la loi:

$$\begin{aligned} V_a(t) &= V_b + K(t - t_o) &\Rightarrow & V_a(t) - V_b = K(t - t_o) = -\mathcal{E}(E(t)) = -\ell_{ab} \times E(t) \\ & &\Rightarrow & E(t) = -\frac{K}{\ell_{ab}}(t - t_o) \quad \text{avec} \quad \ell_{ab} = 4 \text{ mm} \end{aligned}$$

Soient:

$$E_{c,50} = -\frac{K}{\ell_{ab}}(b_2 - t_o) \quad \text{et} \quad E_{c,51} = -\frac{K}{\ell_{ab}}(b_1 - t_o)$$

On en déduit que:

$$\frac{b_2 - t_o}{E_{c,50}} = \frac{b_1 - t_o}{E_{c,51}} \quad \Rightarrow \quad t_o = \frac{b_2 E_{c,51} - b_1 E_{c,50}}{E_{c,51} - E_{c,50}} \quad \text{et} \quad K = -\ell_{ab} \frac{E_{c,50}}{b_2 - t_o} = -\ell_{ab} \frac{E_{c,51}}{b_1 - t_o}$$

Application numérique:

$$t_o = 468,5 \mu\text{s} \quad \text{et} \quad K = -1,26 \times 10^6 \text{ V.s}^{-1}$$

Q 26.

Q 27. L'instant t_l qui délimite la frontière entre les deux états de RYDBERG est donné par la FIGURE précédente:

$$t_l \approx 517,4 \mu s$$

II Étude de la cavité micro-ondes

II.A - Miroirs plans

Q 28. $\underline{s}_o(z, t) = S_o \exp(i(\omega t - kz))$ et $\underline{s}_1(z, t) = S_1 \exp(i(\omega t + kz))$

$$r_M = \frac{\underline{s}_1(z=d, t)}{\underline{s}_o(z=d, t)} \Rightarrow r_M S_o \exp(-ikd) = S_1 \exp(ikd) \Rightarrow S_1 = r_M S_o \exp(-2ikd) = r_M S_o \exp(-i\Phi)$$

$$\Phi = \frac{4\pi d}{\lambda_o} = 2kd \Rightarrow \underline{s}_1(z, t) = r_M S_o e^{-i\Phi} e^{i(\omega t + kz)} \quad \text{ou} \quad \underline{s}_1(z, t) = r_M \underline{s}_o(z, t) e^{i(2kz - \Phi)}$$

Q 29.

$$\bullet \quad \underline{s}_2(z, t) = S_2 \exp(i(\omega t - kz)) \quad \text{et} \quad \underline{s}_1(z, t) = S_1 \exp(i(\omega t + kz))$$

$$r_M = \frac{\underline{s}_2(z=0, t)}{\underline{s}_1(z=0, t)} \Rightarrow S_2 = r_M S_1 = r_M^2 S_o \exp(-i\Phi)$$

$$\Rightarrow \underline{s}_2(z, t) = r_M^2 S_o e^{-i\Phi} e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{ou} \quad \underline{s}_2(z, t) = r_M^2 \underline{s}_o(z, t) e^{-i\Phi}$$

$$\bullet \quad \underline{s}_3(z, t) = S_3 \exp(i(\omega t + kz)) \quad \text{et} \quad \underline{s}_1(z, t) = S_1 \exp(i(\omega t + kz))$$

$$r_M = \frac{\underline{s}_3(z=d, t)}{\underline{s}_2(z=d, t)} \Rightarrow S_3 = r_M S_2 = r_M^2 S_1 e^{-i\Phi}$$

$$\Rightarrow \underline{s}_3(z, t) = r_M^2 \underline{s}_1(z, t) e^{-i\Phi}$$

Q 30. La somme cohérente des amplitudes complexes:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \underline{s}_+(z, t) &= \sum_{p=0}^{\infty} \underline{s}_{2p}(z, t) \\ &= \underline{s}_o + r_M^2 e^{-i\Phi} \underline{s}_o + \dots = \underline{s}_o \left(1 + r_M^2 e^{-i\Phi} + \dots \right) = \frac{\underline{s}_o}{1 - r_M^2 e^{-i\Phi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \underline{s}_-(z, t) &= \sum_{p=0}^{\infty} \underline{s}_{2p+1}(z, t) \\ &= \underline{s}_1 + r_M^2 e^{-i\Phi} \underline{s}_1 + \dots = \underline{s}_1 \left(1 + r_M^2 e^{-i\Phi} + \dots \right) = \frac{\underline{s}_1}{1 - r_M^2 e^{-i\Phi}} \end{aligned}$$

Q 31. L'intensité est maximale pour $\Phi = 2n\pi$

$$2n\pi = \frac{4\pi d}{\lambda_o} \Rightarrow v_{cav} = \frac{nc}{2d} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Q 32.

$$I_{max} \left(\frac{\delta\Phi}{2} \right) = \frac{I_M}{2} \Rightarrow M \sin^2 \left(\frac{\delta\Phi}{4} \right) = 1 \Rightarrow \delta\Phi = \frac{4}{\sqrt{M}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

$$\Phi = \frac{4\pi d}{\lambda_o} = \frac{4\pi d}{c} \nu \Rightarrow \delta\Phi = \frac{4\pi d}{c} \delta\nu \Rightarrow \delta\nu = \frac{c}{\pi d \sqrt{M}}$$

Q 33. On associe à $\delta\nu$ la durée:

$$\tau = \frac{1}{\delta\nu} = \frac{\pi d \sqrt{M}}{c} = \frac{2\pi d \sqrt{R}}{c(1-R)}$$

Q 34. Considérons la configuration suivante avec N_{ph} le nombre de photons de départ:

- En un aller-retour (distance de $2d$), le nombre de photons ayant été perdus est:

$$dN_{ph} = N_{dep} - N_{ret} = N_{ph}(1 - R^2)$$

- Le temps mis par les photons pour un aller-retour est:

$$\Delta t = \frac{2d}{c}$$

- Par conséquent, le taux de variation du nombre de photons est:

$$\frac{dN_{ph}}{dt} = \frac{N_{ph}(1 - R^2)}{\Delta t} = \frac{cN_{ph}}{2d}(1 - R^2) = -\frac{N_{ph}}{\tau_{ph}}$$

- La solution est:

$$N_{ph} = N_o \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ph}}\right)$$

La durée de vie moyenne d'un photon est alors:

$$\tau_{ph} = \frac{2d}{c(1 - R^2)}$$

Dans le cas où $1 - R \ll 1$: $1 - R^2 = (1 - R)(1 + R) \approx 2(1 - R)$; $\tau_{ph} = \frac{d}{c(1 - R)}$

Q 35. Pour $\tau_{photon} = 100 \text{ ms}$ et dans l'hypothèse $1 - R \ll 1$:

$$1 - R^2 = (1 - R)(1 + R) \approx 2(1 - R) \quad \Rightarrow \quad R \approx 1 - \frac{d}{\tau_{ph}c} \rightarrow 1,00$$

Q 36. Les métaux supraconducteurs de résistances électriques nulles sont des meilleurs réflecteurs (*parois très réfléchissantes*). On recouvre les miroirs afin d'empêcher l'absorption, *par ces derniers*, du champ dans la cavité. Par conséquent la durée de vie moyenne du photon sera longue.

II.B - Miroirs sphérique

Q 37.

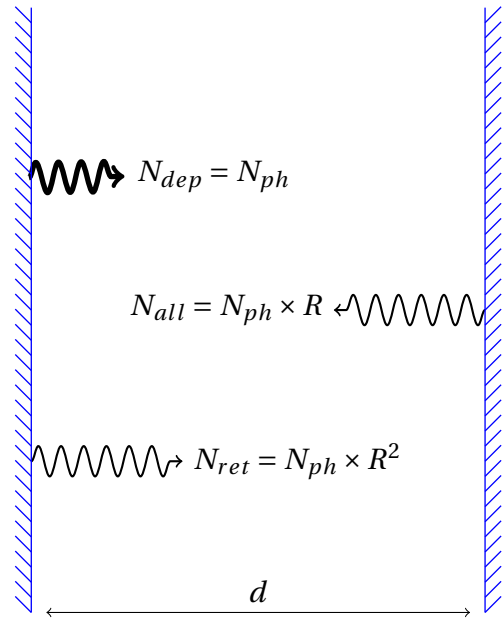
Q 38. $\nu_o = 51,1 \text{ GHz} \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = 5,87 \text{ mm}$

$$w_o = \sqrt{\frac{\lambda_o}{\pi} \sqrt{\frac{d'}{2} \left(R_M - \frac{d'}{2}\right)}} \approx 5,96 \text{ mm}$$

Q 39. Entre $z = 0$ et $z = d'$:

$$|\Delta\Phi| = \frac{2\pi d'}{\lambda_o} - \arctan\left(\frac{\lambda_o d'}{\pi w_o^2}\right) \approx 28 \text{ rad}$$

$$|\Delta\Phi| = k\ell_p = \frac{2\pi}{\lambda_o}\ell_p \quad \text{et} \quad \ell_p = p\frac{\lambda_o}{2} \quad \Rightarrow \quad |\Delta\Phi| = p\pi \quad \Rightarrow \quad p = \frac{|\Delta\Phi|}{\pi} \approx 9$$



Q 40.

$$\ell_p = p \frac{\lambda_o}{2} = \frac{9c}{2\nu_o} = 2,64 \text{ cm}$$

III Couplage entre un atome de Rydberg et la cavité

III.A - Représentation électrocinétique du couplage atome-photon

Q 41. En l'absence du couplage, la loi des mailles donne;

$$\begin{cases} \frac{q_{cav}}{C_{cav}} + L \frac{di_{cav}}{dt} = 0 & \text{avec} & i_{cav} = \frac{dq_{cav}}{dt} \\ \frac{q_{at}}{C_{at}} + L \frac{di_{at}}{dt} = 0 & \text{avec} & i_{at} = \frac{dq_{at}}{dt} \end{cases}$$

Soient:

$$\frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{i_{cav}}{LC_{cav}} = \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \omega_{cav}^2 i_{cav} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{i_{at}}{LC_{at}} = \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \omega_{at}^2 i_{at} = 0$$

$$\omega_{cav} = \frac{1}{\sqrt{LC_{cav}}} \quad \text{et} \quad \omega_{at} = \frac{1}{\sqrt{LC_{at}}}$$

Q 42. Les deux circuits sont considérés sans résistances: les pertes par effet de Joule sont négligés.

Q 43. En présence du couplage; la loi d'OHM donne:

$$\begin{cases} \frac{q_{cav}}{C_{cav}} + L \frac{di_{cav}}{dt} + M \frac{di_{at}}{dt} = 0 & \text{avec} & i_{cav} = \frac{dq_{cav}}{dt} \\ \frac{q_{at}}{C_{at}} + L \frac{di_{at}}{dt} + M \frac{di_{cav}}{dt} = 0 & \text{avec} & i_{at} = \frac{dq_{at}}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{i_{cav}}{C_{cav}} + L \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + M \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} = 0 & \text{ou} & \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \omega_{cav}^2 i_{cav} = 0 \\ \frac{i_{at}}{C_{at}} + L \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + M \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} = 0 & \text{ou} & \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \omega_{at}^2 i_{at} = 0 \end{cases}$$

$$\delta = \omega_{at} - \omega_{cav} \quad \text{et} \quad \omega_o = \frac{\omega_{at} + \omega_{cav}}{2} \Rightarrow \omega_{at} = \omega_o + \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad \omega_{cav} = \omega_o - \frac{\delta}{2}$$

$$\omega_{at}^2 = \omega_o^2 \left(1 + \frac{\delta}{2\omega_o}\right)^2 \approx \omega_o^2 \left(1 + \frac{\delta}{\omega_o}\right) = \omega_o^2 + \omega_o \delta$$

$$\omega_{cav}^2 = \omega_o^2 \left(1 - \frac{\delta}{2\omega_o}\right)^2 \approx \omega_o^2 \left(1 - \frac{\delta}{\omega_o}\right) = \omega_o^2 - \omega_o \delta$$

D'où:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + (\omega_o^2 - \omega_o \delta) i_{cav} &= 0 = \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + (\omega_o^2 - \varepsilon) i_{cav} \\ \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{\Omega}{\omega_o} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + (\omega_o^2 + \omega_o \delta) i_{at} &= 0 = \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{\Omega}{\omega_o} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + (\omega_o^2 + \varepsilon) i_{at} \\ \varepsilon &= \omega_o \delta \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{M}{L} \omega_o \end{aligned}$$

Q 44. On remplace $\underline{i}_{cav} = I_{co} \exp(i\omega t)$ et $\underline{i}_{at} = I_{ao} \exp(i\omega t)$ dans le système d'équations précédent:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \omega_o^2 - \varepsilon) \underline{i}_{cav} - \frac{\Omega\omega^2}{\omega_o} \underline{i}_{at} &= 0 \\ -\frac{\Omega\omega^2}{\omega_o} \underline{i}_{cav} + (-\omega^2 + \omega_o^2 - \varepsilon) \underline{i}_{at} &= 0 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_o^2 - \varepsilon & -\frac{\Omega\omega^2}{\omega_o} \\ -\frac{\Omega\omega^2}{\omega_o} & -\omega^2 + \omega_o^2 - \varepsilon \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \underline{i}_{cav} \\ \underline{i}_{at} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{array}{l} \text{Solutions non tous} \\ \text{nulles} \\ \det(M) = 0 \end{array}$$

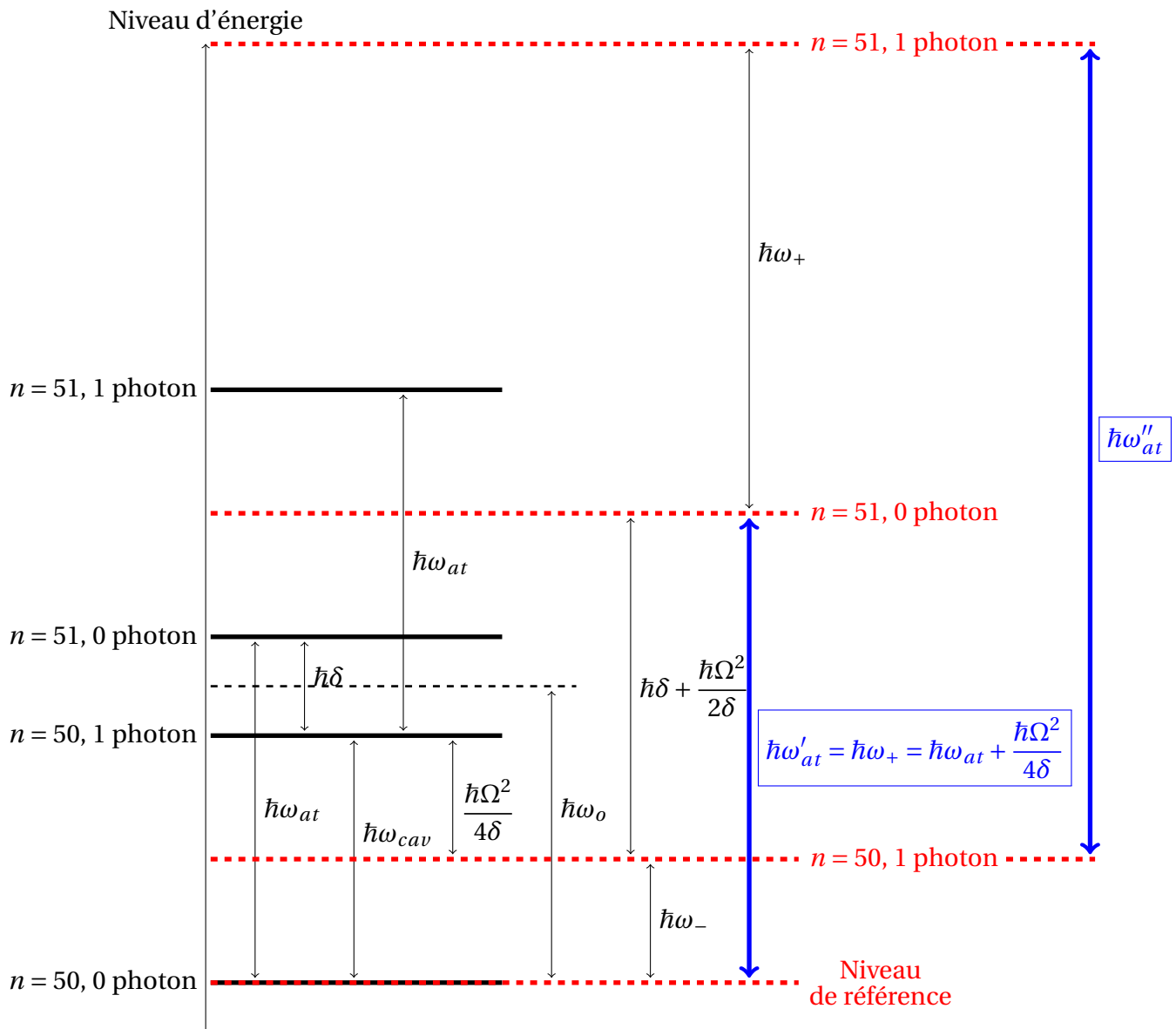
Soit:

$$\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_o^2}\right) \omega^4 - 2\omega_o \omega^2 + \omega_o^2 (-\delta + \omega_o^2) = 0$$

III.B - Couplage atome-photon de la cavité

Q 45. Niveaux d'énergie du système {atome + cavité} en présence de couplage:

$$\begin{array}{lll} \omega_{at} = \omega_o + \frac{\delta}{2} & \text{et} & \omega_{cav} = \omega_o - \frac{\delta}{2} \\ \omega_+ = \omega_o + \frac{\delta}{2} + \frac{\Omega^2}{4\delta} = \omega_{at} + \frac{\Omega^2}{4\delta} & \text{et} & \omega_- = \omega_o - \frac{\delta}{2} - \frac{\Omega^2}{4\delta} = \omega_{cav} - \frac{\Omega^2}{4\delta} \\ \omega_+ > \omega_{at} & \text{et} & \omega_- < \omega_{cav} \end{array}$$



Q 46. En l'absence de couplage entre la cavité et l'atome, la différence d'énergie entre les niveaux $n = 50$ et $n = 51$ est:

$$\hbar\omega_{at}$$

En présence de couplage entre la cavité et l'atome, la différence d'énergie entre les niveaux $n = 50$ -(0 photon) et $n = 51$ -(0 photon) est:

$$\hbar\omega'_{at} = \hbar\omega_+$$

La variation de la pulsation:

$$\Delta\omega_{at}^{(0ph)} = \omega'_{at} - \omega_{at} = \omega_+ - \omega_{at} = \frac{\Omega^2}{4\delta}$$

Q 47. En l'absence de couplage entre la cavité et l'atome, la différence d'énergie entre les niveaux $n = 50$ et $n = 51$ est:

$$\hbar\omega_{at}$$

En présence de couplage entre la cavité et l'atome, la différence d'énergie entre les niveaux $n = 50$ -(1 photon) et $n = 51$ -(1 photon) est (Cf. Diagramme de la question précédente **Q 45.**):

$$\begin{aligned}
 \hbar\omega''_{at} &= \hbar\omega'_{at} - \hbar\omega_- + \hbar\omega_+ \\
 &= \hbar\omega_{at} + \frac{\hbar\Omega^2}{4\delta} + \hbar(\omega_+ - \omega_-) \\
 &= \hbar\omega_{at} + \frac{\hbar\Omega^2}{4\delta} + \hbar\delta + \frac{\hbar\Omega^2}{2\delta} \\
 &= \hbar\omega_{at} + \hbar\delta + \frac{3\hbar\Omega^2}{4\delta}
 \end{aligned}$$

La variation de la pulsation:

$$\Delta\omega_{at}^{(1ph)} = \omega''_{at} - \omega_{at} = \delta + \frac{3\hbar\Omega^2}{4\delta}$$