

Corrigé de l'épreuve

Centrale - Supélec 2019 Physique PC 1

Commentaires sur l'épreuve :

- Intéressant, mais fait référence à des sujets de culture générale non maîtrisés par les étudiants. Très jargonnant.
- Très long (45 questions!), quelques questions ouvertes (Q23, Q24, Q28, Q44, Q45) clairement identifiées dans le sujet, apparemment valorisées dans le barème...mais a-t-on le temps de les chercher ... ? Peu de questions guidées au début du problème, ne met pas en confiance les étudiants les plus faibles. Quelques questions de cours ou très proches du cours mais pas toujours facilement identifiables par les étudiants les plus fragiles (Q1, Q5, Q7, Q12 - Q16, Q19, Q31, Q35). Beaucoup d'applications numériques. Quelques notations manquant.
- Fait appel à de nombreuses parties du programme (sup (thermodynamique), spé (magnétostatique, AD Stern et Gerlach...))

Rapport de jury :

« Cette épreuve a pour but d'étudier un dispositif qui réalise un condensat de Bose-Einstein, à l'aide des lois de la physique classique, (mécanique du point, thermodynamique, magnétostatique, optique, électromagnétisme) et de quelques notions de mécanique quantique vues en première année, qu'un étudiant sortant de classes préparatoires doit maîtriser. Le problème est structuré autour de quatre parties de longueurs inégales.

- La première partie, très courte, permet de mettre en place le problème de manière simple en introduisant le critère de condensation et en justifiant son aspect quantique.
- La deuxième partie décrit le gaz à la sortie du four et dans la mélasse optique transverse.
- La troisième partie, la plus longue, traite du système ralentisseur, on y étudie le piège magnéto-optique. Le champ magnétique qu'il faut créer pour maximiser la force de ralentissement exercée par le laser sur les atomes issus du four, grâce notamment à l'effet Zeeman, y est étudié de façon détaillée.
- La quatrième et dernière partie traite de la fin du chemin pour arriver à la condensation. Le sujet se conclut de belle manière grâce à la démonstration expérimentale de la condensation de Bose-Einstein; cette démonstration est basée sur « l'inversion de l'ellipticité ».

»

On peut citer notamment : « Le barème valorise systématiquement le soin accordé au nombre de chiffres significatifs des résultats obtenus par lecture graphique, dans un tableau de données, ou encore à l'issue d'un calcul. La perte de temps et de points est colossale pour les candidats qui n'ont toujours pas compris ce principe. On rappelle tout particulièrement que lorsqu'un ordre de grandeur est demandé, le résultat doit faire apparaître une puissance de 10 accompagnée de son unité »

Solution proposée par Séverine Mensch (severine@mensch.fr) et Ariane Beyrath (ariane.beyrath@gmail.com)

Merci de nous contacter pour toute correction ou ajout.

Odyssée vers la condensation de Bose-Einstein

I Le critère de condensation

Q 1. L'énergie cinétique de la particule $E_c = \frac{1}{2}MV_T^2$ est homogène à $k_B T$,

on en déduit : $V_T = \sqrt{\frac{k_B T}{M}}$ rq : on peut aussi partir d'une forme du type $v = k_B^\alpha T^\beta M^\gamma$ et identifier α, β et γ par analyse dimensionnelle

Q 2. La longueur de de Broglie s'écrit $\Lambda_T = \frac{h}{p} = \frac{h}{MV_T} = \frac{h}{\sqrt{Mk_B T}}$ on retrouve bien la formule de l'énoncé à un facteur multiplicatif prêt.

Rq : On montre en physique quantique que $E_c = \pi k_B T = \frac{1}{2} \frac{p^2}{M}$, on retrouve alors $\Lambda_T = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2\pi M k_B T}}$ comme indiqué dans l'énoncé.

Q 3. Si $\mathcal{D} \approx 1$, alors $n^* \approx \Lambda_T^{-3}$, La distance moyenne entre deux atomes voisins est donc le l'ordre de grandeur de sa longueur thermique de de Broglie, c'est à dire de la longueur de cohérence du paquet d'onde qui lui est associé. Les particules vont donc interagir : il peut y avoir « condensation ».

Q 4. L'expression précédente se réécrit :

$$\mathcal{D} = 2,612 = \Lambda_T^3 n^* = \frac{h^3}{(2\pi M k_B T)^{\frac{3}{2}}} n^*$$

$$\text{On en déduit : } T_c = h^2 \left(\frac{\mathcal{D}}{n^*} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2\pi M k_B}$$

$$\underline{\text{AN : } T_c \approx 8.5 \times 10^{-8} \text{ K}}$$

II Du four à la mélasse transverse

A Le four

Q 5. Les atomes ayant trois degrés de liberté $\frac{1}{2}MV^2 = \frac{3}{2}k_B T$:

$$V = \sqrt{\frac{k_B T}{M}}$$

$$\underline{\text{AN : } V \approx 2.10^2 \text{ m.s}^{-1}}$$

Q 6. L'équation des gaz parfaits $P = \frac{n}{V} \frac{\mathcal{N}_A}{N_A} RT$ devient $P = n_F^* k_B T$:

$$n_F^* = \frac{P}{k_B T} \text{ Puis } \mathcal{D} = \Lambda(T)^3 n_F^* = \frac{h^3}{(2\pi M k_B T)^{\frac{3}{2}}} n_F^*$$

$$\underline{\text{AN : } n_F^* \approx 2.10^{19} \text{ m}^{-3}}, \text{ en accord avec le graphe de la figure 2.}$$

B La mélasse optique transverse

Q 7. On étudie un atome, modélisé par un point matériel, dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen. Le principe fondamental de

la dynamique projeté sur l'axe $\vec{u}_x$ conduit à l'équation différentielle suivante : $\dot{v}_x + \frac{\alpha}{M} v_x = 0$. Par identification :

$$\tau = \frac{M}{\alpha}$$

AN : $\tau = 4 \times 10^{-5} \text{ s}$

- Q 8. Le temps de parcours dans la mélasse est de l'ordre de $t_i = \frac{L}{v_z} = \frac{L}{V}$, ou $L = 6 \text{ cm}$ est la longueur de la zone d'interaction.

AN : $t_i = 6 \times 10^{-4} \text{ s}$, grand devant τ : le temps passé dans la mélasse permet en effet de freiner efficacement les particules dans les directions x et y .

Les vitesses $v_x \ll V$ et $v_y \ll V$ sont telles que le faisceau est unidirectionnel, dirigé selon $\vec{u}_z$.

- Q 9. Le vecteur densité de courant de particules s'écrit $j^* = n_j^* V$: $n_j^* = \frac{j^*}{V}$

AN : $n_j^* = 2 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$, qui correspond bien là encore au graphe de la figure 2.

III Le ralentisseur et le piège magnéto-optique

A Interaction entre les atomes et les photons du laser ralentisseur

A.1 Champ électrique du laser ralentisseur

- Q 10. On peut envisager deux méthodes :

— Détermination de la longueur de Rayleigh du laser (on note w_0 le rayon minimal du laser) :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

AN : $z_R = 50 \text{ cm}$

La taille du ralentisseur est de l'ordre de grandeur de longueur de Rayleigh du laser (lecture sur la figure 2 $\approx 50 \text{ cm}$, l'onde peut-être considérée comme plane.

— Évaluation de la divergence du faisceau :

$$\theta \approx \frac{\lambda}{w_0}$$

AN : $\theta \approx 8.10^{-4} \text{ rad}$: le faisceau reste bien cylindrique sur la distance de 50 cm considérée : largeur maximale de la divergence $\approx 10^{-3} \text{ m}$ pour un faisceau de 3 mm : on est là encore dans les mêmes ordres de grandeur, l'approximation cylindrique reste valable.

- Q 11. La lumière issue du laser peut donc être modélisée par une onde plane monochromatique se propageant dans la direction $-\vec{e}_z$ et polarisée rectilignement selon $\vec{e}_x$: $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + kz + \varphi) \vec{u}_x$

A.2 Modèle de l'électron élastiquement lié

Q 12. A la résonance : $\omega = \omega_0$ donc

$$\lambda_0 = \frac{c}{\omega_0} 2\pi = \frac{2\pi\hbar}{\Delta E_0}$$

Par identification avec la forme canonique de l'équation différentielle

$$\frac{\omega_0}{Q} = \Gamma : \boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} = \frac{c}{\lambda_0 \Gamma} 2\pi}$$

AN : $\lambda_0 = 782 \text{ nm}$ en accord avec l'énoncé ; $Q = 7,3 \cdot 10^7 \gg 1$ la résonance est donc extrêmement aiguë.

Q 13. L'équation de l'énoncé devient en régime sinusoïdal forcé :

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2)x &= \frac{q_e}{m_e} E_0 \\ x &= \frac{q_e}{m_e} E_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega} \\ &= \frac{q_e}{m_e} E_0 \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } \boxed{X = \frac{|q_e|}{m_e} E_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2} \omega^2}}}$$

On reconnaît un comportement de type passe-bas d'ordre 2.

Q 14. Cette amplitude est maximale à la résonance, en utilisant la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$: $X = \frac{q_e}{m_e} E_0 \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$

En posant

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \\ f'(x) &= 2x \left(-2(1 - x^2) + \frac{1}{Q^2} \right) \\ &= 2 \frac{x}{Q^2} (-2Q^2(1 - x^2) + 1) \quad \text{s'annule pour :} \\ 1 - x^2 &= \frac{1}{Q^2} \\ x &= \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \quad \text{pour } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

La condition étant largement vérifiée ici : $\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{2\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\Gamma^2}{4\omega_0^2} \right)}$

On en déduit : $\boxed{\left| \frac{\omega_r - \omega_0}{\omega_0} \right| = \frac{\Gamma^2}{4\omega_0^2} = \frac{1}{4Q^2}}$

AN : $\left| \frac{\omega_r - \omega_0}{\omega_0} \right| = 5 \cdot 10^{-17}$, on a donc $\omega_r \approx \omega_0$

Q 15. $X_{\max}$ est l'amplitude du mouvement de l'électron à la résonance.

Q 16. On repart de l'équation différentielle vérifiée par le mouvement de l'électron

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{q_e}{m} E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Pour faire apparaître des puissances moyennes, il faut multiplier par la vitesse et prendre la valeur moyenne sur une période une fois le régime sinusoïdal forcé atteint :

$$< \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 x \frac{dx}{dt} > = < \frac{q_e}{m} E_0 \frac{dx}{dt} \cos(\omega t + \varphi_0) >$$

avec $x(t) = X(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$

$$\frac{dx}{dt} = -X(\omega)\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{et enfin } \frac{d^2x}{dt^2} = -X(\omega)\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{donc } \left\langle \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \right\rangle = 0 \text{ de même que } \left\langle \frac{dx}{dt} x(t) \right\rangle = 0$$

$$\text{Il reste donc } \left\langle m_e \Gamma \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle = m_e \left\langle \frac{q_e}{m} E_0 \frac{dx}{dt} \cos(\omega t + \varphi_0) \right\rangle$$

$$\boxed{- \left\langle P_f \right\rangle = \left\langle P_e \right\rangle}$$

ce qui conduit à :

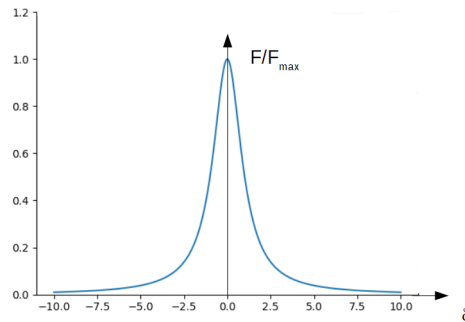
$$\begin{aligned} P(\delta) &= - \left\langle -m_e \Gamma \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \right\rangle \\ &= m_e \Gamma \frac{1}{2} \omega^2 X(\omega)^2 \\ &= m_e \Gamma \frac{1}{2} \omega^2 \frac{X_{\max}^2}{\delta^2 + 1} \end{aligned}$$

On en déduit l'expression demandée :

$$\boxed{P(\delta) = \frac{P_{\max}}{\delta^2 + 1} \quad \text{avec} \quad P_{\max} = \frac{1}{2} m_e \Gamma X_{\max}^2}$$

A.3 Expression de la force hors résonance

Q 17. Avec $F(\delta) = \frac{F_{\max}}{1+\delta^2}$ l'allure de la courbe est :



Lorsque l'atome sort du four à la vitesse v_z il est résonnant avec le laser de pulsation ω_L dans le référentiel du laboratoire, donc $\delta = 0$ et $F = F_{\max}$ avec $\omega_L = \frac{\omega_0}{1+v_z/c}$

$$\underline{\text{AN}} \quad \omega_L = \frac{\omega_0}{1+v_z/c} \approx \omega_0 \approx 2,4 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$$

La force sera divisée par 5 pour $|\delta| = 2$ donc pour $|\omega' - \omega_0| = \Gamma$.

La particule ralentit, la pulsation qu'elle voit diminue donc $\omega' < \omega_0$

$$\omega' = \omega_0 - \Gamma = \left(1 + \frac{v_z}{c}\right) \omega_L - \Gamma$$

$$= \left(1 + \frac{v'_z}{c}\right) \omega_L$$

$$1 + \frac{v'_z}{c} = 1 + \frac{v_z}{c} - \frac{\Gamma}{\omega_L}$$

$$\text{donc } \boxed{v'_z = v_z - \frac{\Gamma c}{\omega_L}}$$

$$\underline{\text{AN}} : v'_z = 295 \text{ m.s}^{-1} \text{ Le ralentissement n'est pas très efficace.}$$

Q 18. Au fur et à mesure du ralentissement ω diminue si ω_L n'est pas adapté, ce qui se traduit par une force plus faible (δ augmente). Pour éviter une baisse d'efficacité du dispositif il faut maintenir δ faible et

donc augmenter ω_L au fur et à mesure du ralentissement. On peut alors espérer un ralentissement beaucoup plus efficace, au prix d'un fonctionnement en mode impulsif et non continu.

A.4 Utilisation de l'effet Zeeman

Q 19. Les grandeurs physiques caractéristiques du problème sont :

- la charge élémentaire e ,
- la masse de l'électron m_e et
- la constante de Planck h .

On cherche donc μ_B sous la forme $\mu_B = \alpha e^a m^b h^c$, où α est un nombre sans dimension et a , b et c des nombres rationnels :

$$[\mu_B] = I L^2$$

$$[h] = [\text{énergie}] \cdot T = M L^2 T^{-1}$$

$$[e] = I T$$

$$I L^2 = (I T)^a (M)^b (M L^2 T^{-1})^c$$

$$\text{On en déduit} \left| \begin{array}{l} a=1 \\ c=a=1 \\ b=-c=-1 \end{array} \right. \quad \text{d'où :}$$

$$\mu_B = \alpha \frac{eh}{m}$$

AN : On peut montrer que $\alpha = \frac{1}{4\pi}$.

L'expérience de Stern et Gerlach permet de mettre en évidence la quantification du moment magnétique des atomes

Q 20. Pour maintenir la force maximale il faut avoir $\delta = 0$ c'est à dire $\omega = \omega_0$ en permanence :

$$\text{— en sortie du four : } \omega_L = \frac{\omega_0(B)}{1 + \frac{v_z}{c}}$$

$$\text{— lorsque l'atome est immobile : } \omega_L = \omega_0(B + \Delta B) = \omega_0(B) + \frac{\mu_B B_z}{h}$$

La fréquence du laser étant fixe :

$$\frac{\omega_0(B)}{1 + \frac{v_z}{c}} \approx \omega_0(B) \cdot (1 - \frac{v_z}{c}) = \omega_0(B + \Delta B) = \omega_0(B) + \frac{\mu_B \Delta B}{h}$$

$$-\frac{v_z}{c} \omega_0(B) = \frac{\mu_B \Delta B}{h}$$

$$\boxed{\Delta B = -\frac{h}{\mu_B} \frac{v_z}{c} \omega_0(B)}$$

AN : $\Delta B = 170 \text{ Gauss}$, en accord avec la figure 3.

Q 21. v_1 désigne maintenant la vitesse en entrée du ralentisseur et v_z la vitesse à l'abscisse z .

Le principe fondamental de la dynamique donne en projection sur l'axe $\vec{e}_z$:

$$\begin{aligned}
 M \frac{dv_z}{dt} &= -a \\
 v_z &= -at + v_1 \quad \text{d'où} \quad t = \frac{v_1 - v_z}{a} \\
 z - z_1 &= -a \frac{t^2}{2} + v_1 t \\
 &= -\frac{(v_1 - v_z)^2}{2a} + \frac{v_1(v_1 - v_z)}{a} \\
 (v_1 - v_z)^2 - 2v_1(v_1 - v_z) + 2a(z - z_1) &= 0 \quad \text{avec} \quad \Delta = 4v_1^2 + 2a(z - z_1) \\
 v_1 - v_z &= \frac{2v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2a(z - z_1)}}{2} \\
 &= v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2a(z - z_1)}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$v_z = v_1 \sqrt{1 + \frac{2a}{v_1^2}(z - z_1)}$$

Q 22. Le profil le plus adapté est tel que :

$$\omega = \left(1 + \frac{v_z}{c}\right) \omega_L = \omega_0(B(z)) \quad \text{en entrée :}$$

$$\omega = \left(1 + \frac{v_1}{c}\right) \omega_L = \omega_0(B(z_1))$$

$$\begin{aligned}
 \frac{v_z - v_1}{c} \omega_L &= \mu_B \frac{B_z - B_1}{\hbar} \\
 B_z &= B_1 + \frac{\hbar}{\mu_B} \cdot \frac{v_z - v_1}{c} \omega_L \\
 &= B_1 + \frac{\hbar \omega_L}{\mu_B c} \cdot \frac{2v_1 + 2\sqrt{v_1^2 + 2a(z - z_1)}}{2} \\
 &= B_1 + \frac{\hbar \omega_L}{\mu_B c} v_1 \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2a}{v_1^2}(z - z_1)}\right)
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$B_z(z) = b_0 + b_1 \sqrt{1 + \beta(z - z_1)} \quad \text{avec} \quad b_1 = \frac{\hbar \omega_L}{\mu_B c} v_1 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2a}{v_1^2}$$

Q 23. Le sens de circulation du courant dans les enroulements est donné par l'orientation du champ magnétique :

- selon $\vec{u}_\theta$ (coordonnées cylindriques) pour le premier enroulement
- selon $-\vec{u}_\theta$ pour le deuxième enroulement

En utilisant le modèle du solénoïde infini au niveau des extrema de la courbe (là où les effets de bord sont les plus faibles) : $B = \mu_0 \frac{N}{L} I$ soit :

$$N = \frac{BL}{\mu_0 I}$$

On évalue L sur la figure 3 :

Enroulement	$B_{\max}$ (T)	L (m)	Nombre de spires
1	$150 \cdot 10^{-4}$	10^{-1}	350
2	$-55 \cdot 10^{-4}$	10^{-2}	13

Q 24. On trouve dans la thèse de Bruno Desruelles à laquelle le texte fait référence (<https://tel.archives-ouvertes.fr/pastel-00716029/>) que cela permet de minimiser la valeur maximale du champ et donc de maintenir les pertes par effet Joule à un niveau raisonnable. Cette explication ne nous semble pas très claire.

On peut aussi penser à l'intérêt d'un passage par la valeur $B = 0$?

B Le piège magnéto-optique

B.1 Force exercée par les lasers en l'absence du champ magnétique

Q 25. Avec $\vec{B} = 0$ l'expression de δ_i se simplifie. On s'intéresse tout d'abord au faisceau laser se propageant dans la direction $\vec{e}_x$: $\delta_x = \frac{\omega_x - \omega_o}{\Gamma/2}$

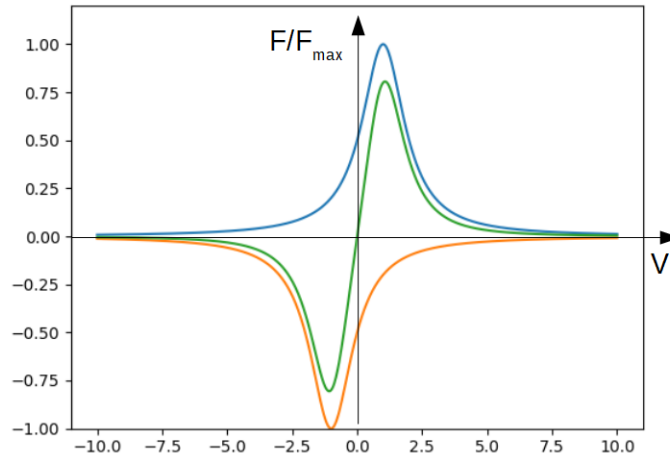
avec $\omega_x = (1 - \frac{v_x}{c})\omega_L$

d'où $\delta_x = \frac{2}{\Gamma}((1 - \frac{v_x}{c})\omega_L - \omega_o) = \Delta - V$

$$\text{D'où } F_+ = \frac{F_{\max}}{1 + (\Delta - V)^2}$$

$$\text{Un calcul analogue donne } F_- = -\frac{F_{\max}}{1 + (\Delta + V)^2}$$

Q 26. Pour $\Delta = 1$, $F_+ = \frac{F_{\max}}{1 + (1 - V)^2}$ et $F_- = -\frac{F_{\max}}{1 + (1 + V)^2}$

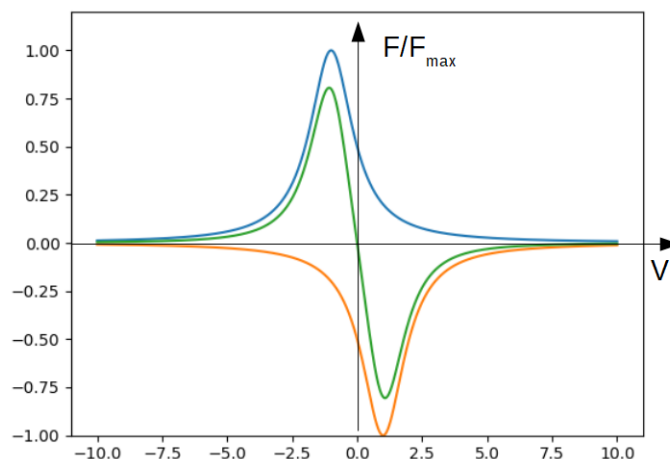


Courbes $F/F_{\max} = f(V)$, F_+ en bleu, F_- en orange, en vert la résultante.

L'effet est raté : quelque soit le signe de v_{x0} la force s'exerce dans le sens du mouvement et accélère la particule !

En effet, pour une particule se déplaçant dans le sens $\vec{e}_x$, le faisceau laser se déplaçant dans le sens $+$ est accélérateur, le faisceau laser dans le sens $-$ freine : il faut que l'effet ralentisseur l'emporte sur l'effet accélérateur, donc que $\omega_- = (1 + \frac{v_x}{c})\omega_L$ s'approche de ω_o alors que $\omega_+ = (1 - \frac{v_x}{c})\omega_L$ s'en éloigne : il faut $\omega_L < \omega_o$ donc $\Delta < 0$.

On peut tracer les mêmes courbes avec $\Delta = -1$ (même code couleur) :



Cette fois il y a bien un effet de frein, F et V sont de signes contraire.

Q 27. $F_x = F_+ + F_- = F_{\max} \left(\frac{1}{1+(\Delta-V)^2} - \frac{1}{1+(\Delta+V)^2} \right)$

Pour $|V| \ll |\Delta|$ on peut faire un DL₁ en V :

$$F_x \approx F_{\max} \left(\frac{1}{1+\Delta^2-2\Delta V} - \frac{1}{1+\Delta^2+2\Delta V} \right)$$

$$F_x \approx F_{\max} \left(1 + \frac{2\Delta V}{1+\Delta^2} - \left(1 - \frac{2\Delta V}{1+\Delta^2} \right) \right) \approx \frac{4\Delta F_{\max}}{(1+\Delta^2)^2}$$

$$F_x \approx -\alpha V$$

où $\alpha = \frac{-4F_{\max}\Delta}{(1+\Delta^2)^2}$

rq : $\Delta < 0$ donc $\alpha > 0$

B.2 Force exercée par les lasers en présence du champ magnétique

Q 28. Pour un point M de l'axe, le champ est sur l'axe (invariance par rotation/axe).

Par antisymétrie par rapport au plan (yOz) les deux bobines créent des champs symétriques, qui s'annulent en O , la fonction $B(x)$ pour un point M de l'axe est impaire. Un DL₁ au voisinage de $x = 0$ donne donc $\vec{B}(x, 0, 0) = \frac{dB}{dx}(x=0)x\vec{e}_x$.

Compte tenu du sens des bobinages des deux bobines, la bobine 1 située en $x < 0$ crée un champ $\vec{B}_1$ orienté sur $+\vec{e}_x$, la bobine 2 située en $x > 0$ crée un champ $\vec{B}_2$ orienté sur $-\vec{e}_x$. En $x > 0$ $\|\vec{B}_2\| > \|\vec{B}_1\|$ donc $\vec{B} \cdot \vec{e}_x < 0$ donc $\frac{dB}{dx}(x=0) < 0$: on le note $-B'$ et

$$\vec{B}(x, 0, 0) = -B'(x=0)x\vec{e}_x$$

au voisinage de $x = 0$ avec $B' > 0$

- Q 29. Prenons le cas du faisceau laser qui se propage dans le sens $+\vec{e}_x$, δ_+ devient en présence de $\vec{B}$
 $\delta_+ = \frac{\omega_+ - \omega_o + m \frac{\mu_B}{\hbar B' x}}{\Gamma/2}$ avec $\omega_+ = (1 - \frac{v_x}{c})\omega_L$
 donc on retrouvera les mêmes expressions en remplaçant V par

$$V = \frac{\frac{v_x \omega_L}{c} - \frac{m \mu_B B' x}{\hbar}}{\Gamma/2}$$

 d'où $F_x \approx -\alpha V \approx -\frac{2\alpha\omega_L}{\Gamma c} v_x + \frac{2\alpha\mu_B B'}{\Gamma \hbar} x$
 soit la superposition d'une force de frottement fluide et d'une force de rappel vers $x = 0$ à condition que $m < 0$
- Q 30. AN avec $D_p = \Lambda_1^3 n^* = \frac{\hbar^3 n^*}{(2\pi M k_B T)^{3/2}} \approx 10^{-7}$ ce qui est cohérent avec la figure 2, et encore loin du but.

IV Le refroidissement évaporatif et la condensation de Bose-Einstein

A Le piège magnétique

A.1 Champ quadrupolaire créé par les quatre fils

- Q 31. Question de cours, application du théorème d'Ampère au fil infini :
 $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz.
- Q 32. Le fil est désormais en $x_1 = -D$:

$$r = \sqrt{(D+x)^2 + y^2} \text{ et } \vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y \text{ avec}$$

$$\cos\theta = \frac{D+x}{\sqrt{(D+x)^2 + y^2}} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{(D+x)^2 + y^2}}$$

On obtient ainsi une expression explicite du champ $\vec{B}_1$ sur les axes Ox et Oy :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{pmatrix} -y \\ (D+x)^2 + y^2 \\ D+x \\ (D+x)^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

En considérant que le point est au voisinage de O on peut faire des DL₁ des expressions en fonction des variables adimensionnées $x' = \frac{x}{D}$ et $y' = \frac{y}{D}$

$$\frac{D+x}{(D+x)^2 + y^2} \approx \frac{1}{D} \frac{1+x/D}{1+2x/D} \approx \frac{1}{D} (1-x')$$

$$\frac{y}{(D+x)^2 + y^2} \approx \frac{1}{D} \frac{y/D}{1+2x/D} \approx \frac{1}{D} y'$$

d'où l'expression simplifiée de $\vec{B}_1$ sur la base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \begin{pmatrix} -y' \\ 1-x' \end{pmatrix}$$

- Q 33. Pour le fil 2 les calculs sont les mêmes en changeant D en $-D$:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{-2\pi D} \begin{vmatrix} y/D \\ 1 + x/D \end{vmatrix}$$

$$\text{soit } \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \begin{vmatrix} -y' \\ -1 - x' \end{vmatrix}$$

$$\text{d'où } \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi D} \begin{vmatrix} -y' \\ -x' \end{vmatrix}$$

- Q 34. La seconde paire de fil se déduit de la première par une rotation de $\pi/2$ (donc une transformation $x \rightarrow y, y \rightarrow -x, \vec{e}_x \rightarrow \vec{e}_y$ et enfin $\vec{e}_y \rightarrow -\vec{e}_x$) et un changement de signe pour I

$$\vec{B}_3 + \vec{B}_4 = \frac{-\mu_0 I}{\pi D} (x' \vec{e}_y - y' (-\vec{e}_x)) = \frac{\mu_0 I}{\pi D} (-y' \vec{e}_x - x' \vec{e}_y) \text{ donc ce champ vient en effet doubler le précédent.}$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\vec{B} = -B_1 (y' \vec{e}_x + x' \vec{e}_y)}$$

A.2 Interaction dipôle-champ

Q 35. $\boxed{\mathcal{E} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}}$

- Q 36. La position d'équilibre stable correspond au minimum d'énergie potentielle, donc à $\vec{B} \parallel \vec{\mathcal{M}}$ et dans le même sens.

Pour cette position, on peut réécrire $\mathcal{E} = -\mathcal{M}B$ où B est la norme du champ magnétique. Pour pouvoir piéger le dipôle il faut atteindre un point qui maximise B : avec la forme proposée, et dans les conditions précisées $\frac{B_1^2}{B_0 D^2} > \frac{B''}{z_0^2}$ et $B'' > 0$ on a un minimum de B en $O = (0, 0, 0)$, mais pas de maximum : l'équilibre sera instable, le dipôle ne peut être piégé.

- Q 37. Pour une particule quantique, avec le champ proposé, on obtient

$$\mathcal{E}_{mF} = -m_F g_F \mu_B [B_0 + (\frac{B_1^2}{B_0 D^2} - \frac{B''}{z_0^2}) \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{B'' z^2}{z_0^2}] \text{ où on reconnaît un potentiel harmonique du type :}$$

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p0} + \frac{1}{2} M \omega_r^2 r^2 + \frac{1}{2} M \omega_z^2 z^2 \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ à condition que } g_F m_F < 0$$

$$\text{avec } \omega_r = \sqrt{\frac{-m_F g_F \mu_B}{M} (\frac{B_1^2}{B_0 D^2} - \frac{B''}{z_0^2})}$$

$$\text{et } \omega_z = \sqrt{\frac{-m_F g_F \mu_B}{M} \frac{2B''}{z_0^2}}$$

la particule quantique est bien piégée.

B Le refroidissement évaporatif

- Q 38. La conservation de l'énergie totale s'écrit ici :

$$3k_B T_o N_o = 3k_B T_1 N_1 + (N_o - N_1) \eta k_B T_o$$

$$3(N_o T_o - N_1 T_1) = (N_o - N_1) \eta T_o$$

- Q 39. Pour une évolution continue, on obtient l'équation différentielle qui régit l'évolution en remplaçant N_o par $N(t)$, N_1 par $N(t + dt)$, T_o par $T(t)$, T_1 par $T(t + dt)$:

$$3d(NT) = \eta T dN \text{ donc } 3(NdT + TdN) = \eta T dN$$

on obtient la relation demandée en divisant par NT : $\frac{dN}{N}(\eta - 3) = 3 \frac{dT}{T}$

- Q 40. En expulsant les particules les plus énergétiques du puits de potentiel harmonique pour diminuer la température, on réduit le domaine du potentiel dans lequel celles qui restent évoluent : elles se concentrent au centre du puits, où, à nombre N d'atomes dans le puits constant, la densité particulaire augmente.

- Q 41. On admet $n_o^* = \alpha N T^{-3/2}$ et $\mathcal{D} = \Lambda_T^3 n^*$ avec $\Lambda \propto T^{-1/2}$ donc $\mathcal{D} = \beta N T^{-3}$

Une différentielle logarithmique donne $\frac{d\mathcal{D}}{\mathcal{D}} = \frac{dN}{N} - 3 \frac{dT}{T}$

avec Q 40. $\frac{d\mathcal{D}}{\mathcal{D}} = \frac{dN}{N}(4 - \eta)$.

On veut $d\mathcal{D} < 0$ pour $dN < 0$ il faut donc que $\eta > 4$ ce qui est le cas puisque le texte parle de $\eta \approx 7$

- Q 42. l'équation précédente s'intègre sous la forme $\mathcal{D}_l(t) = \mathcal{D}_p \left(\frac{N(t)}{N_o}\right)^{4-\eta}$

Lorsque $\eta \rightarrow \infty$, comme $N(t) < N_o$, $\mathcal{D}_l \rightarrow 0$: la concentration est d'autant plus efficace que η est grand.

- Q 43. AN avec les valeurs proposées : $\mathcal{D}_o \approx 1$: compte tenu des approximations faites, on peut considérer que le but est atteint, la condensation de Bose Einstein est possible dans ces conditions.

C Preuve expérimentale de la condensation de Bose-Einstein

- Q 44. Durant le vol, les particules sont sans interaction et conservent la vitesse qu'elles avaient au moment où le piège est coupé, elles vont donc s'éloigner depuis le centre où elles étaient piégées. A l'instant τ elles sont en $\vec{r}_i = \vec{v}_{oi} \tau$: l'image de l'ombre des particules renseigne donc sur la distribution des vitesses $\vec{v}_{oi}$

Pour une fréquence de 39,516 MHz l'extension spatiale du nuage est de 0,75 mm pour une durée $\tau = 22\text{ms}$, on en déduit $v_o \approx \frac{0,75}{22} = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{m.s}^{-1}$, d'où on déduit une température

$$T \approx \frac{M v^2}{k_b} \approx 1,210^{-5} \text{ K}$$

- Q 45. Inégalité de Heisenberg : $\Delta p_x \Delta x \gtrsim \hbar/2$: δp_x écart type de p_x , δx écart type de x .

ω_r caractérise les mouvements radiaux dans le piège, ω_z les mouvements longitudinaux, comme $\omega_r > \omega_z$ les fluctuations radiales sont plus importantes que les fluctuations longitudinales : aux temps courts l'ellipse est allongée dans la direction radiale.

A cause de l'inégalité de Heisenberg, ce relatif confinement longitudinal va conduire à une vitesse longitudinale plus importante, et donc un allongement dans la direction longitudinale aux temps plus longs : il y a inversion de l'ellipticité.

Un nuage thermique serait isotrope aux temps courts comme aux temps longs.