

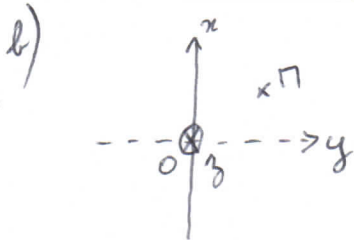
Partie A:

I) Principe de l'électro-oculographie

1) Système constitué de 2 plans de charges opposées

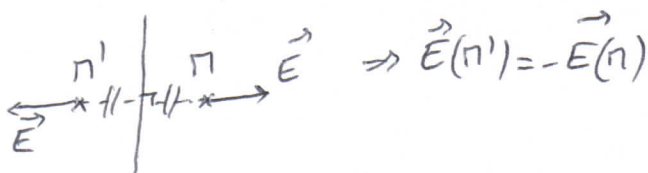
a) théorème de Gauss: le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée S est égal à la somme des charges à l'intérieur de S , divisée par la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



* symétries:

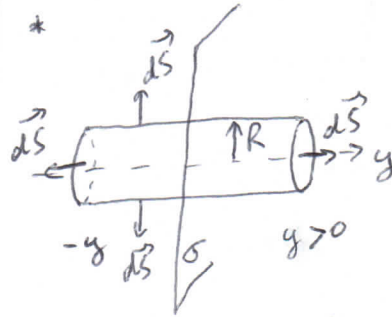
- tous les plans contenant l'axe (Π_y) sont plans de symétrie de la distribution de charge. Or $\vec{E}$ est un vecteur polaire $\Rightarrow \vec{E}(\Pi) \in \Pi$ à tous ces plans $\Rightarrow \vec{E} = E \vec{u}_y$
- le plan contenant les charges (plan $y=0$) est plan de symétrie de la distribution de charge



* invariances: on a invariance de la distribution de charges par translation selon $\vec{u}_x$

$$\Rightarrow E(x, y, z) \Rightarrow E(y)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = E(y) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad E(-y) = -E(y)$$



surface de Gauss: cylindre d'axe Π_y , de rayon R , fermé par 2 disques aux cotés y et $-y$

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{base } y} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{base } -y} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{\text{base } -y} E(y) \vec{u}_y \cdot (+dS \vec{u}_y) + \iint_{\text{base } y} E(-y) \vec{u}_y \cdot (-dS \vec{u}_y) \\ &= 2 \iint_{\text{base } y} E(y) dS = 2 E(y) \iint_{\text{base } y} dS \\ &= 2 E(y) \pi R^2 \quad (y > 0) \end{aligned}$$

$$= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0}$$

thm de Gauss

$$\Rightarrow E(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y \quad \text{si } y > 0 \\ \vec{E} &= \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y \quad \text{si } y < 0 \end{aligned}$$

c) α

En remplaçant σ par $-\sigma$, on obtient:

$$\vec{E}_2 = -\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y \quad \text{si } y < a$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y \quad \text{si } y > a$$

Principe de superposition: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y \quad \text{pour } 0 < y < a$$

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \text{pour } y < 0 \text{ ou } y > a$$

B) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$dV = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y \cdot (dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z)$$

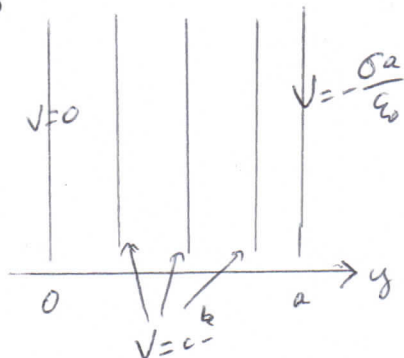
$$= -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dy$$

$$\Rightarrow V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} y + c^k \quad \text{or } V(0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V(\pi) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} y} \quad \text{pour } 0 < y < a$$

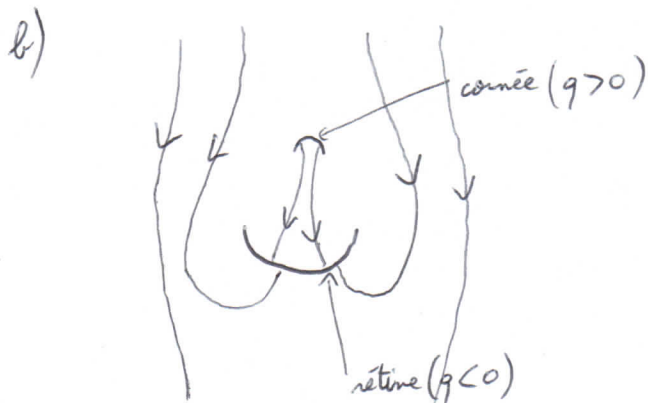
γ) $V = c^k \Rightarrow y = c^k$

$\Rightarrow$ les surfaces équipotentiellles sont des plans $y = c^k$



2) Globe oculaire:

a) Une ligne de champ (de vecteurs) est une courbe, qui en tout point, a une tangente dans la même direction que le vecteur en ce point.

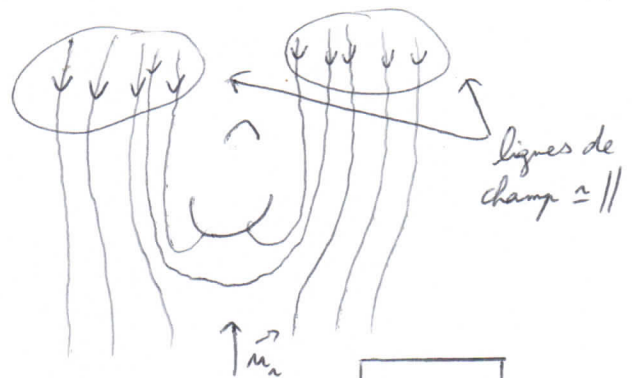


D'après la loi de Coulomb, $\vec{E}$ s'éloigne des charges > 0 et se rapproche des charges < 0 , d'où le sens des lignes de champ.

3) Mesure de l'angle de rotation θ du globe oculaire:

a) * La modélisation par un champ uniforme n'est pas très adaptée, car à l'évidence, d'après la figure 1b, les lignes de champ ne sont pas rectilignes!

Toutefois, les électrodes n'étant pas très près de l'œil, les lignes de champ peuvent être assimilées à des droites parallèles si on n'est pas trop près de l'œil.



* $\vec{E}(\pi) = E_0 \vec{u}_n$ avec $\boxed{E_0 < 0}$

(cf orientation des lignes de champ)

b) $\vec{E}(\pi) = E_0 \vec{u}_n = -E_0 \sin \theta \vec{u}_x + E_0 \cos \theta \vec{u}_y$
 $= -\vec{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \boxed{K = E_0 \sin \theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \boxed{K' = -E_0 \cos \theta}$$

c) $\theta = 0 \Rightarrow V(\pi, y, 0) = -E_0 y$

$$(K = 0, K' = -E_0)$$

$$\Rightarrow V(A) = -E_0 b \quad \text{et} \quad V(A') = -E_0 b$$

$$\Rightarrow \boxed{U = V(A) - V(A') = 0}$$

d) $V(A) = E_0 \sin \theta a - E_0 \cos \theta b$

$$V(A') = E_0 \sin \theta (-a) - E_0 \cos \theta b$$

$$\Rightarrow \boxed{U = V(A) - V(A') = 2 E_0 a \sin \theta}$$

II) Traitement analogique du signal

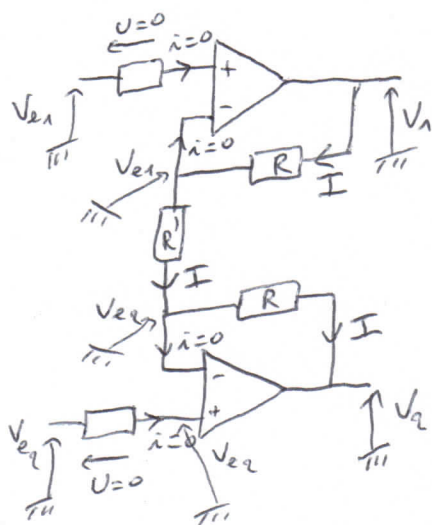
1) Amplificateur de différence:

a) ALI réel: gain statique: $A_0 \approx 10^5$
 impédance d'entrée: $Z_e \approx 10 \text{ M}\Omega$
 impédance de sortie: $Z_s \approx 100 \Omega$

b) ALI idéal: gain statique: $A_0 \rightarrow \infty$
 impédance d'entrée: $Z_e \rightarrow \infty$
 impédance de sortie: $Z_s = 0$

c) ALI idéal $\Rightarrow i^+ = i^- = 0$

ALI idéal de gain infini + régime linéaire $\Rightarrow V^+ = V^-$



* $i^+ = 0 \Rightarrow U = 0$ aux bornes des résistances R sur les entrées (+)

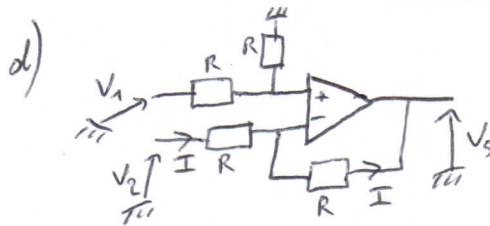
$\Rightarrow V_{e1} - V_{e2}$ est la tension aux bornes de R'

* $i^- = 0 \Rightarrow$ on retrouve le même courant I dans R , R' et R (cf dessin).

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{e1} - V_{e2} = R' I \\ V_1 - V_2 = R I + R' I + R I \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = (2R + R') I = \frac{2R + R'}{R'} (V_{e1} - V_{e2})$$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = \left(1 + 2 \frac{R}{R'}\right) (V_{e2} - V_{e1})$$



* $i^+ = 0 \Rightarrow$ diviseur de tension: $V^+ = \frac{R}{R+R} V_1 = \frac{V_1}{2}$

* $i^- = 0 \Rightarrow I = \frac{V_2 - V^-}{R} = \frac{V^- - V_s}{R}$

$$\Rightarrow V_s = 2V^- - V_2 = 2V^+ - V_2 = V_1 - V_2$$

$V^- = V^+ \text{ (régime linéaire)}$

$$\Rightarrow V_s = V_1 - V_2 = \left(1 + 2 \frac{R}{R'}\right) (V_{e1} - V_{e2})$$

e) $A_d = \left| \frac{V_s}{V_{e2} - V_{e1}} \right| \Rightarrow A_d = 1 + 2 \frac{R}{R'}$

$$A_d = 1 + 2 \frac{100}{2} \Rightarrow A_d = 1.10^2$$

f) $V_s = A_d (V_{e1} - V_{e2}) \approx 1.10^2 \times 100 \mu\text{V}$
 $\approx 1.10^4 \mu\text{V} \approx 10 \text{ mV}$

L'amplitude de V_s est de l'ordre de 10 mV .

2) Filtrage:

a) 50 Hz correspond à la fréquence du cœdeur (EXF). Il est fréquent de "capter" des ondes parasites à cette fréquence. Un filtre coupe-bande permet de les éliminer.

Un filtre coupe-bande à 50 Hz n'est pas nécessaire pour les signaux oculaires (fréquence comprise entre 0,002 Hz et 10 Hz). De toute façon, le filtre passe-bas suivant va éliminer cette fréquence de 50 Hz!

b) Un filtre passé-bas de fréquence de coupure supérieure à 10 Hz permet d'éliminer les bruits de haute fréquence, ce qui améliore la qualité des signaux oculaires.

c) $x \rightarrow 0 : \underline{H} \rightarrow H_0 = 1$
 $x \rightarrow \infty : \underline{H} \rightarrow 0$) filtre passé-bas OK!

$$* x \rightarrow 0 : \underline{H} \rightarrow \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q}} = H_0 = 1$$

$$|\underline{H}| = 1 \quad G = 20 \log |\underline{H}| = 0 \quad \boxed{G = 0}$$

$$* x \gg 1 : \underline{H} \rightarrow \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q}} = \frac{-H_0}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$|\underline{H}| = \frac{1}{x^2} \quad \boxed{G = -40 \log x}$$

* intersection des asymptotes : $0 = -40 \log x$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ et } G = 0$$

* la courbe de gain présente-elle un maximum ?
 (résonance?)

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

$$\Rightarrow G = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

présente un maximum si $f(x) = (1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}$

présente un minimum ($x = x^2$)

$$\frac{df}{dx} = 0 = -2(1-x) + \frac{1}{Q^2}$$

$$\Rightarrow x = x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$\text{or } x^2 > 0 \Rightarrow \text{max possible si } 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2Q^2} < 1 \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$: pas de résonance

$> \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\exists$ résonance

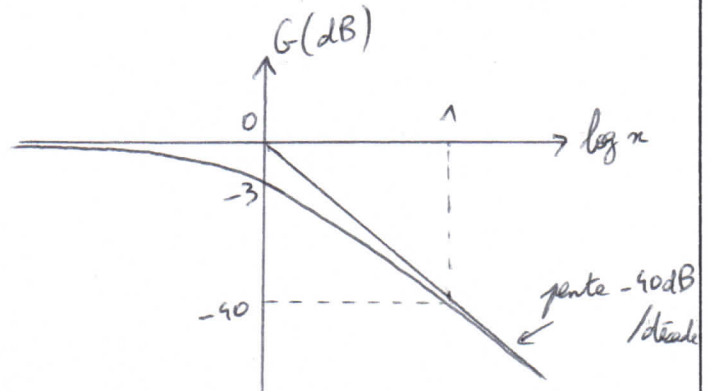
Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a un maximum pour

$$x_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Ici, $Q = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est le cas limite!

On n'a pas résonance (ou bien résonance en $x=0$)

$\Rightarrow$ le maximum de la courbe est en $\log x \rightarrow -\infty$



B) La fréquence de coupure à -3 dB est la fréquence telle que

$$|\underline{H}(f=f_c)| = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Ici, pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|\underline{H}|$ est maximum

en $x=0$ et $|\underline{H}|_{\max} = |H_0| = 1$

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$= \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ pour } x = x_c = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{f_c = f_0 = 15 \text{ Hz}}$$

3) Acquisition du signal:

a) condition de Nyquist - Shannon: la fréquence d'échantillonnage doit être strictement supérieure à deux fois la plus grande fréquence présente dans le spectre du signal continu à échantillonner:

$$f_e > 2 f_{\max}$$

b) $f_{\text{limite}} = 2 f_{\max} = 2 \times 10 = 20 \text{ Hz}$

$$f_{\text{limite}} = 20 \text{ Hz}$$

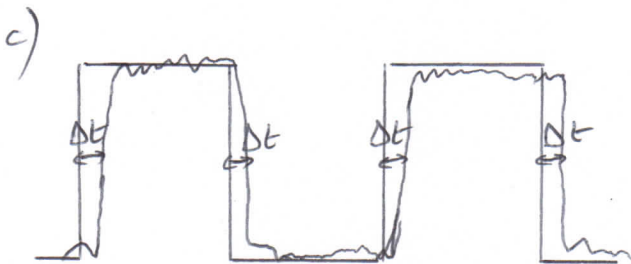
nombre de points: N

durée d'acquisition: $T = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

période d'échantillonnage = durée entre 2 points de mesure = $T_e = \frac{1}{f_e}$

$$N = \frac{T}{T_e} = T f_{\text{limite}} = 60 \times 20$$

$$N = 1200 \text{ points}$$



$\Delta t \Rightarrow 0,2 \text{ divisions}$

ou calibre: 1 s/div

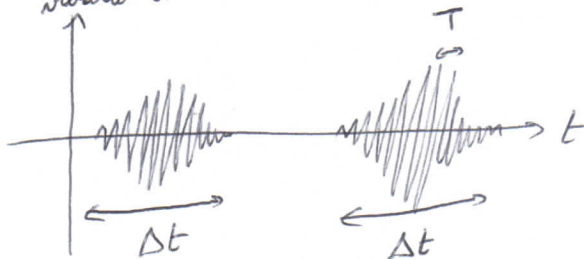
$$\Rightarrow \text{retard } \Delta t \approx 0,2 \text{ s}$$

Partie B:

Biométrie de l'œil par interférométrie à cohérence partielle

I) Obtention d'interférences:1) Longueur de cohérence temporelle d'une source lumineuse

a) * L'émission lumineuse se fait par trains d'onde.
vibration lumineuse



* modèle en accord avec le caractère discontinu de la lumière (cf émission de photons)

* chaque train d'onde, de durée Δt finie, est constitué d'un très grand nombre d'oscillations de période T.

* la durée d'un train d'onde Δt est appelé temps de cohérence de la source.

* les trains d'onde successifs émis par la source sont déphasés de manière aléatoire.

b) LASER: longueur de cohérence $L_c \approx 1\text{m}$

$$\Delta t = \frac{L_c}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow \Delta t = 10^{-9} \cdot 10^{-8} \Delta$$

$$c) * \Delta t \cdot \Delta f \approx 1 \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\Delta f}$$

avec Δt: temps de cohérence de la source

Δf: largeur spectrale en fréquence de la source

$$* \lambda = cT = \frac{c}{f} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$$

$$\Rightarrow df = -c \frac{d\lambda}{\lambda^2} \Rightarrow \Delta f = c \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2}$$

$$* \Rightarrow \Delta t = \frac{\lambda_0^2}{c \Delta \lambda} = \frac{(820 \cdot 10^{-9})^2}{3 \cdot 10^8 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}$$

$$\Delta t = \frac{8,20^2 \cdot 10^{-14}}{15} = \frac{67}{15} \cdot 10^{-14} = 4,5 \cdot 10^{-14}$$

$$\Delta t = 4,5 \cdot 10^{-14} \Delta$$

d) Dans le vide, la vitesse de la lumière est c.

$$\text{Donc } L_c = c \Delta t = \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda} = \frac{(820 \cdot 10^{-9})^2}{50 \cdot 10^{-3}}$$

$$L_c = \frac{8,2^2 \cdot 10^{-14}}{50 \cdot 10^{-3}} = \frac{67}{50} \cdot 10^{-5} = 1,3 \cdot 10^{-5}$$

$$L_c = 13 \mu\text{m}$$

e) source parfaitement monochromatique $\Rightarrow \Delta f = 0$

or $\Delta t \cdot \Delta f \approx 1 \Rightarrow \Delta t \rightarrow \infty$ (logique: la "longueur" de la sinusoïde est infinie)

$$\Rightarrow L_c \rightarrow \infty$$

2) Interférences de 2 ondes:

$$a) \delta = (S_2 P) - (S_1 P) = n d_2 - n d_1$$

milieu homogène d'indice n

$$\delta = n(d_2 - d_1)$$

b) * les 2 ondes sont cohérentes $\Rightarrow$ même pulsation

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi c_0}{\lambda_0}$$

$$* a_1(P, t) = A_1 \cos(\omega_0 t - \phi_1(P))$$

$$\text{avec } \phi_1(P) = \frac{2\pi(S_1 P)}{\lambda_0} - \phi_{S_1}$$

$$* a_2(P, t) = A_2 \cos(\omega_0 t - \phi_2(P))$$

$$\text{avec } \phi_2(P) = \frac{2\pi(S_2 P)}{\lambda_0} - \phi_{S_2}$$

avec $\phi_{S_1} = \phi_{S_2}$ car les 2 ondes sont cohérentes
(même train d'onde initial)

$$\Rightarrow a(P, t) = a_1(P, t) + a_2(P, t)$$

$$= A_1 \cos(\omega_0 t - \phi_1(P)) + A_2 \cos(\omega_0 t - \phi_2(P))$$

* S_1 seule : $I_1 = \langle a_1^2(P, t) \rangle = \frac{1}{2} A_1^2$

S_2 seule : $I_2 = \langle a_2^2(P, t) \rangle = \frac{1}{2} A_2^2$

* 2 sources ensemble : $I = \langle (a_1 + a_2)^2 \rangle$

$$I = \langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle + 2 \langle a_1 a_2 \rangle$$

$$\uparrow$$

 I_1

$$\uparrow$$

 I_2

$$\uparrow$$

 I_{12} (terme
d'interférences)

$$I_{12} = 2 A_1 A_2 \langle \cos(\omega_0 t - \phi_1(P)) \cos(\omega_0 t - \phi_2(P)) \rangle$$

or $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$\Rightarrow I_{12} = A_1 A_2 \langle \cos(2\omega_0 t - (\phi_1(P) + \phi_2(P))) \rangle + A_1 A_2 \langle \cos(\phi_2(P) - \phi_1(P)) \rangle$$

$\langle \cos(2\omega_0 t - (\phi_1(P) + \phi_2(P))) \rangle = 0$

$$I_{12} = A_1 A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} (S_2 P) - (S_1 P)\right)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\sqrt{2I_1} \quad \sqrt{2I_2}$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda_0}$$

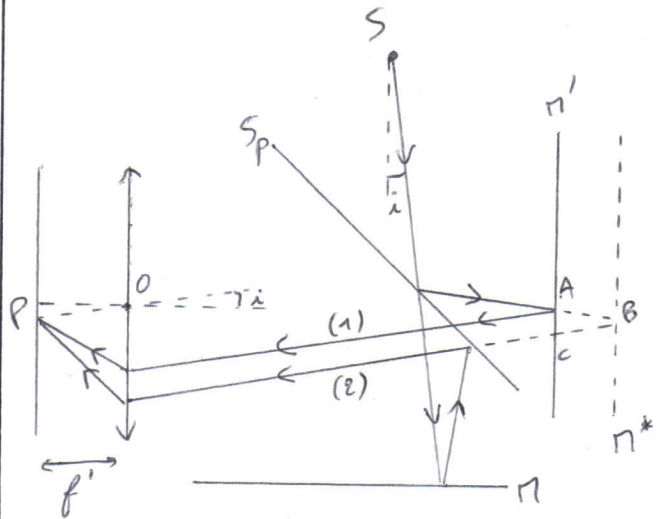
c) $I_1 = I_2 = I_0$

$$\Rightarrow I(P) = 2I_0 (1 + \cos \phi) \quad (c)$$

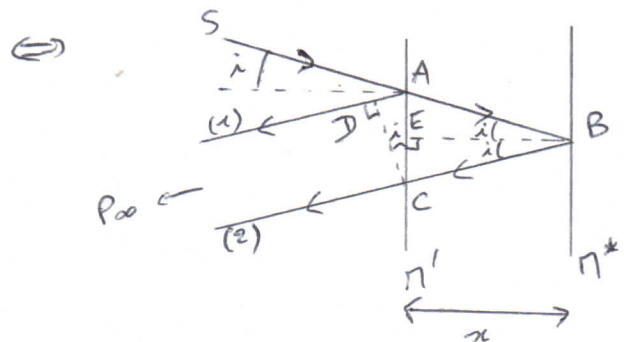
avec $\phi = \frac{2\pi \delta}{\lambda_0}$

II) Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

1) Grâce au dessin ci-dessous, on montre que le montage est équivalent à une lame d'air.



M^* = symétrique de M par rapport à S_P



$$\delta = (SP)_2 - (SP)_1$$

$$= [(SA) + (AB) + (BC) + (CP)]$$

$$- [(SA) + (AD) + (DP)]$$

* or $(CP) = (DP)$ d'après le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Fermat

* $(AB) = (BC) = n_a AB$ (n_a = indice de l'air)

or $AB = \frac{x}{\cos i}$ (triangle ABE)

* $(AD) = n_a AD = n_a AC \sin i$
 $\uparrow$
triangle ACD

$AC = 2AE = 2x \tan i$ (triangle ABE)

$$\Rightarrow \delta = n_a \frac{2x}{\cos i} - n_a 2x \tan i \sin i$$

$$= 2n_a x \left(\frac{1}{\cos i} - \frac{\sin^2 i}{\cos i} \right) = 2n_a x \frac{\cos^2 i}{\cos i}$$

$$\Rightarrow \delta = 2n_a x \cos i$$

n_a = indice optique de l'air

i = angle d'incidence

2) Les franges sont caractérisées par $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = c^{-1}$

$$\Rightarrow \delta = c^{-1} \Rightarrow i = c^{-1}$$

$\Rightarrow$ on observe des anneaux centrés sur l'axe optique de la lentille.

3) * on chariotte M dans le sens qui fait rentrer les anneaux vers le centre.

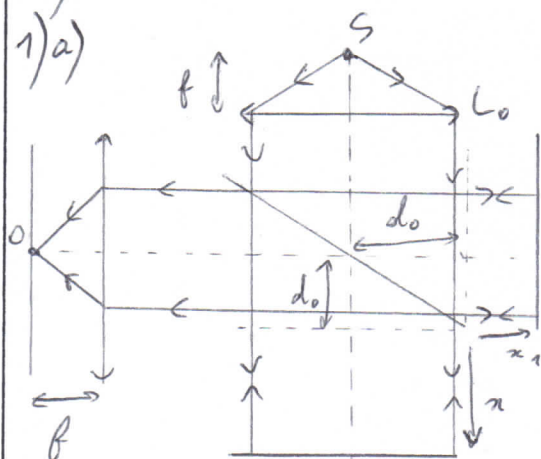
(on voit un anneau: $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = c^{-1}$)

$$\Rightarrow \frac{2n_a x \cos i}{\lambda_0} = c^{-1} \quad x \nearrow \Rightarrow \cos i \nearrow \Rightarrow i \nearrow$$

* De plus, on peut montrer (mais pas en 5 lignes en tout!) que quand x diminue, on voit de moins en moins d'anneaux, c'est-à-dire que le $n^{\text{ème}}$ anneau brillant a un rayon de + en + grand.

III) Mesure de position:

1) a)



On éclipse en incidence normale (S au foyer d'objet de L_0): $i = 0$

$\Rightarrow$ on n'observe qu'un point sur l'écran (au niveau du détecteur en O)

b) On remplace x par $(x - x_1)$ et i par 0

$$\Rightarrow \delta = 2n_a (x - x_1)$$

$$c) p = \frac{\delta}{\lambda_0}$$

$$d) p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2n_a (x - x_1)}{\lambda_0}$$

$$\frac{2n_a (x_0 - x_1)}{\lambda_0} = 0 \quad (p = 0 \text{ si } x = x_0)$$

$$\Rightarrow x_0 = x_1$$

$\Rightarrow$ La détection de l'ordre 0 permettrait de mesurer x_1 à partir de la mesure de x_0 car $x_0 = x_1$!

2) Cas où la source est parfaitement monochromatique

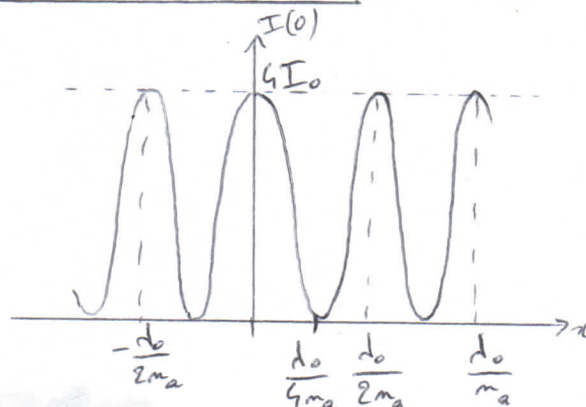
$$a) I = 2I_0 (1 + \cos \phi) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda_0}\right)$$

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi n_a (x - x_1)}{\lambda_0}\right)$$

b) I est maximum quand $\frac{4\pi n_a (x - x_1)}{\lambda_0} = 2\pi p, p \in \mathbb{Z}$
 or I est max en $x = 0 \Rightarrow \frac{4\pi n_a (0 - x_1)}{\lambda_0} = 2\pi q, q \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x = x_1 + p \frac{\lambda_0}{2n_a} = k \frac{\lambda_0}{2n_a} \quad \text{avec } k = p - q \in \mathbb{Z}$$

B)



c) On a une évolution périodique de $I(x)$ avec x

$\Rightarrow$ il n'est pas possible de repérer l'état d'interférence d'ordre 0 sur la courbe $I(x)$ lorsque la source est parfaitement monochromatique.

3) La source S est à faible cohérence temporelle:

a) $p=0 \Rightarrow \delta=0 \Rightarrow 2m_a(\pi_0 - \pi_1) = 0$

$\Rightarrow \pi_0 = \pi_1$

$\delta=0 < L_c = 1,80 \mu m \Rightarrow$ relation c

$I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{d_0}\right) = 4I_0$

$-1 < \dots < 1 \quad \delta=0$

$\hookrightarrow I_{\max} = 4I_0$

$\Rightarrow$ l'intensité de cette frange est maximale.

b) il y a interférences si $-L_c < \delta < L_c$

$\Rightarrow -L_c < 2m_a(\pi - \pi_1) < L_c$

$\Rightarrow -\frac{L_c}{2m_a} + \pi_1 < \pi < \frac{L_c}{2m_a} + \pi_1$

$\pi_- = \pi_1 - \frac{L_c}{2m_a}$

$\pi_+ = \pi_1 + \frac{L_c}{2m_a}$

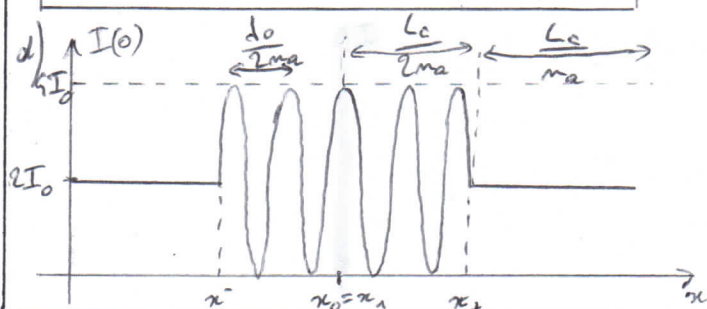
c) La distance entre 2 maxima est (cf III) 2) b):

$\frac{d_0}{2m_a}$

nombre de maxima détectables: $\frac{\pi_+ - \pi_-}{\frac{d_0}{2m_a}}$

$= \frac{\frac{L_c}{m_a}}{\frac{d_0}{2m_a}} = \frac{2L_c}{d_0} = \frac{2 \times 1,80 \cdot 10^{-6}}{800 \cdot 10^{-9}} = 4,5$

nombre de maxima détectables = $\frac{2L_c}{d_0} = 5$



e) d) cf ombre précédente, il y a plusieurs valeurs de x pour lesquelles on a un maximum d'intensité!
 $\Rightarrow$ on sait que $\pi^- < \pi_0 < \pi^+ \Rightarrow$ encadrement de π_0 .

B) $\frac{\pi^+ + \pi^-}{2} = \pi_1 = \pi_0$

$\Rightarrow \pi_0$ est au milieu de l'intervalle π_-, π_+

$\pi^+ - \pi^- = \frac{L_c}{m_a} \Rightarrow \pi_0 = \frac{\pi^+ + \pi^-}{2} \pm \frac{L_c}{2m_a}$

$\Rightarrow$ incertitude $\Delta\pi_0 = \frac{L_c}{2m_a}$

IV) Application à la biométrie de l'œil:

1) Le faisceau 1 parcourt la distance AB à l'aller et au retour, dans un milieu d'indice n_c .

Le faisceau 2 parcourt la distance π à l'aller et au retour, dans un milieu d'indice n_a .
 Le reste des chemins optique est parfaitement compensé ($\pi_A = 0$).

$\Rightarrow \delta = (SO)_2 - (SO)_1 = 2m_a \pi - 2m_c AB$

$\Rightarrow \delta = 2m_a \pi - 2m_c D_c$

2) $\delta=0$ pour $\pi_B = \frac{m_c}{m_a} D_c$

3) $\Rightarrow D_c = \frac{m_a}{m_c} \pi_B$

V) Enregistrement:

a) entre P_1 et P_2 : cornée

entre P_2 et P_3 : humeur aqueuse

entre P_3 et P_4 : cristallin

entre P_4 et P_5 : humeur vitrée

entre P_5 et P_6 : rétine

b) * distance entre P_4 et $P_5 = 3,7 \text{ cm}$ (lecture graphique)
 sur l'énoncé original, avant
 passage par la photocopieuse ---

* Sans changement d'échelle, on devrait avoir:

$$\cdot \quad \pi_{45} = \frac{n_{45}}{n_a} D_{45} = \frac{n_v}{n_a} D_v = \frac{1,344}{1,00} \times 16,14 \text{ mm}$$

$$\cdot \Rightarrow \text{agrandissement} = \frac{3,7}{1,344 \times 1,614}$$

* distance entre P_3 et $P_4 = 2,5 \text{ cm}$ (lecture graphique)

* $\Rightarrow$ sans agrandissement:

$$\pi_{34} = \frac{2,5 \text{ cm}}{\text{agrandissement}} = \frac{2,5 \text{ cm}}{\frac{3,7}{1,344 \times 1,614}}$$

$$\cdot \text{ cf IV) 3): } LT = \frac{n_a}{n_{ct}} \pi_{34}$$

$$LT = \frac{1,00}{1,406} \times 1,344 \times 1,614 \times \frac{2,5}{3,7} \text{ cm}$$

$$LT = \frac{n_v}{n_{ct}} \times \frac{2,5}{3,7} D_v$$

$$LT = \frac{1,344}{1,406} \times \frac{2,5}{3,7} \times 16,14 \text{ mm}$$

$$LT \approx 4,0 \text{ mm}$$

Partie C :

Ecoulement sanguin

I) Ecoulement dans un tuyau :

$$1) \quad \mathcal{D}_v = \pi R^2 V_m \quad (V_m : \text{vitesse moyenne})$$

$$= \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

$$\mathcal{D}_v = \iint B \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{u}_z \cdot r dr d\theta \vec{u}_z$$

$$= B \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr$$

$$= B 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R$$

$$= B 2\pi \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right) = B \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\Rightarrow B = \frac{2\mathcal{D}_v}{\pi R^2}$$

2) a) force surfacique de cisaillement :

$$|dF| = \eta \left| \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial r} \right| dS$$

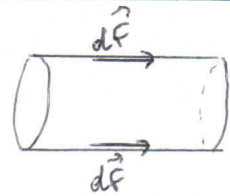
$$\Rightarrow F = \eta \left| \frac{\partial \left(B \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \right)}{\partial r} \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{paroi en } r=R}}{2\pi R L}$$

$$F = \eta \frac{2\mathcal{D}_v}{\pi R^2} \left(\frac{2r}{R^2} \right)_{r=R} 2\pi R L$$

$$\Rightarrow F = 8\eta \frac{L}{R^2} \mathcal{D}_v$$

b) Les zones les plus rapides ont tendance à entraîner les plus lentes. L'écoulement va de gauche à droite et la paroi est fixe.

$$\Rightarrow \vec{F} \propto + \vec{u}_z$$



3) système : fluide à l'intérieur du tuyau

En régime stationnaire : $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$* + P_e S \vec{u}_z \quad \text{avec } S = \pi R^2$$

$$* - P_s S \vec{u}_z \quad \text{avec } S = \pi R^2$$

$$* - \vec{F} = -F \vec{u}_z = -8\eta \frac{L}{R^2} \mathcal{D}_v \vec{u}_z$$

(énergie perdue par la paroi sur le fluide)

$$\Rightarrow P_e \pi R^2 - P_s \pi R^2 - F = 0$$

$$\Rightarrow P_e - P_s = \frac{F}{\pi R^2}$$

Cette différence de pression est nécessaire pour "compenser" l'action de la paroi sur le fluide.

$$4) P_e - P_s = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \mathcal{D}_v = R_h \mathcal{D}_v$$

$$\text{avec } R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

II) Perte de charge :

1) a) La charge est homogène à une pression

$$\Rightarrow \text{en Pascal Pa}$$

b) Pour un fluide parfait incompressible en écoulement stationnaire :

$$\Sigma = P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cte}$$

La charge est constante dans l'écoulement.

$$2) a) \mathcal{P}_c = f \frac{L}{2R} \frac{\rho V_m^2}{2}$$

$$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$$

en Pa en Pa

sans dimension (L en m et R en m)

$$\Rightarrow f \text{ est sans dimension}$$

b) Les pertes de charges régulières se produisent dans une conduite de section constante à cause de la dissipation visqueuse au sein du fluide

et au frottement sur la paroi du tuyau. Les pertes de charge régulières sont proportionnelles à la longueur de la conduite.

c) Pertes de charge singulières: → liées à une brusque variation de la géométrie de la conduite entraînant l'apparition de zones de forte dissipation.

ex: → sur des coudes

→ sur des bifurcations

→ sur des raccords entre canalisation de sections différentes.

$$3) a) * \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\frac{\varepsilon}{3,71D}}{\frac{2,51}{Re \sqrt{f}}} \right)$$

↖
négligeable pour
 Re très élevé

→ $\frac{1}{\sqrt{f}}$ et donc f ne dépend pas de Re

si Re très élevé.

→ conduites horizontales pour Re grand

* Si $\frac{\varepsilon}{D}$ grand, $\log \frac{\varepsilon}{3,71D}$ grand

→ $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \frac{\varepsilon}{3,71D}$ petit

→ f grand

$\frac{\varepsilon}{D}$ grand → f grand OK!

b) * $Re \leq 1$: écoulement laminaire }
 $Re \gtrsim 3000$: écoulement turbulent } comme

* D'après le diagramme, les limites semblent être différentes:

$Re \leq 2 \cdot 10^3$: laminaire (à gauche)

$Re \gtrsim 4 \cdot 10^3$: turbulent (à droite)

* Pour les écoulements laminaires ($Re \leq 2 \cdot 10^3$)

$\log f$ décroît linéairement en fonction de $\log Re$

* Pour les écoulements turbulents ($Re \gtrsim 4 \cdot 10^3$), f dépend peu de Re , mais dépend de $\frac{\varepsilon}{D}$ (cf 3a)

c) a) Pour les écoulements laminaires ($Re \leq 2 \cdot 10^3$), $\log f$ décroît linéairement en fonction de $\log Re$.

$$\Rightarrow \log f = \log K + \alpha \log Re \quad (\alpha < 0)$$

$$\Rightarrow \log f = \log(K Re^\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{f = K Re^\alpha}$$

B) Pour $Re = 1 \cdot 10^3$, $f = 0,065$
 Pour $Re = 2 \cdot 10^3$, $f = 0,032$ (lecture graphique)

$$\Rightarrow \begin{cases} \log 6,5 \cdot 10^{-2} = \log K + \alpha \log 1 \cdot 10^3 \\ \log 3,2 \cdot 10^{-2} = \log K + \alpha \log 2 \cdot 10^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log 6,5 + \log 10^{-2} = \log K + 3\alpha \\ \log 3,2 + \log 10^{-2} = \log K + \alpha(\log 2 + 3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,8 - 2 = \log K + 3\alpha \\ 0,5 - 2 = \log K + 3,3\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \log K = -1,2 \\ 3,3\alpha + \log K = -1,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,3\alpha = -0,3 \\ 3\alpha + \log K = -1,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \log K = 1,8 \end{cases}$$

$$\log K = 1,8 = 1 + 0,8 = \log 10 + \log 6,5 \\ = \log(10 \times 6,5) = \log 65$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -1} \text{ et } \boxed{K = 65}$$

$$\Rightarrow f = \frac{65}{Re} \quad (Rq: \text{ dans la littérature, on trouve plutôt } f = \frac{64}{Re})$$

4) a) cf I) 1): $\boxed{\mathcal{D}_v = \pi R^2 V_m}$

b) $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_d + \mathcal{P}_c$

(charge en entrée = charge en sortie + perte de charge)

$$P_e + \rho g z_e + \frac{\rho v_e^2}{2} = P_a + \rho g z_a + \frac{\rho v_a^2}{2} + \mathcal{P}_c$$

or $z_a = z_e$ et $v_a = v_e$ (régime permanent
 horizontal $\Rightarrow$ conservation du débit
 volumique Sv (car $l=c^{1/2}$)
 or $S=c^{1/2} \Rightarrow$ distribution
 de vitesse inchangée

$$\Rightarrow P_e - P_a = \mathcal{P}_c = f \frac{L}{2R} \frac{\rho v_m^2}{2}$$

$$\Rightarrow P_e - P_a = f \frac{L \rho v_m^2}{4\pi^2 R^5} \quad \text{car } v_m = \frac{D_v}{\pi R^2}$$

c) cf I) 2) et 3): $P_e - P_a = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{8\eta L D_v}{\pi R^4}$

$$\Rightarrow f \frac{L \rho v_m^2}{4\pi^2 R^5} = \frac{8\eta L D_v}{\pi R^4}$$

$$\Rightarrow f = \frac{32\eta \pi R}{D_v \rho} = \frac{32\eta \pi R}{\pi R^2 v_m \rho}$$

$\uparrow$
 $D_v = \pi R^2 v_m$

$$= \frac{64}{2 v_m \rho R} = \frac{64}{R_e}$$

$$\Rightarrow f = \frac{64}{R_e}$$

d) cf II) 3) c): $f = \frac{65}{R_e} \Rightarrow$ en accord!

Le modèle théorique est en accord avec le
 diagramme de Moody pour les écoulements
 laminaires.

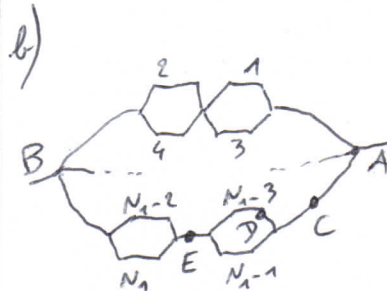
5) Application à la circulation sanguine:

a) $R_{RAB} = \frac{P_A - P_B}{D_{VA}} = \frac{4,0 \cdot 10^3 - 1,6 \cdot 10^3}{1,8 \cdot 10^{-3} \times \frac{1}{60}}$

($1L = 1 \cdot 10^{-3} m^3$, $1 \text{ min}^{-1} = \frac{1}{60} s^{-1}$)

$$R_{RAB} = \frac{2,4 \times 60}{1,8} 10^6 = \frac{4 \times 60}{3} 10^6 = 4 \times 10^6$$

$$\Rightarrow R_{RAB} = 8,0 \cdot 10^7 Pa \cdot s \cdot m^{-3}$$



* conservation du débit volumique (écoulement per-
 manent d'un fluide incompressible):

$$D_{VA} = \frac{N_1}{4} D_{VC} \quad \left(\frac{N_1}{4} = \text{nb d'artérioles} \right)$$

* De même, $D_{VD} = \frac{D_{VC}}{2}$

$$\Rightarrow D_{Vcap} = \frac{2 D_{VA}}{N_1}$$

* Par symétrie, $P_E = \frac{P_A + P_B}{2}$

$$\Rightarrow (P_A - P_E) = \frac{P_A - P_B}{2}$$

$$\begin{aligned} * R_{Rcap} &= \frac{P_A - P_E}{D_{Vcap}} = \frac{P_A - P_B}{2} \times \frac{N_1}{2 D_{VA}} \\ &= \frac{N_1}{4} \frac{P_A - P_B}{D_{VA}} = \frac{N_1}{4} R_{RAB} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_1 = 4 \frac{R_{Rcap}}{R_{RAB}} = 6,0 \cdot 10^{11}$$

Pq: on peut aussi raisonner en termes de résistances
 équivalentes:

$$\begin{aligned} R_{1234} &= R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4 = R_{Rcap} \parallel R_{Rcap} + R_{Rcap} \parallel R_{Rcap} \\ &= 2 \frac{R_{Rcap}^2}{R_{Rcap} + R_{Rcap}} = R_{Rcap} \end{aligned}$$

L'association de ces $\frac{N_1}{4}$ résistances en // donne:

$$R_{RAB} = \frac{R_{Rcap}}{\frac{N_1}{4}} \Rightarrow N_1 = 4 \frac{R_{Rcap}}{R_{RAB}}$$