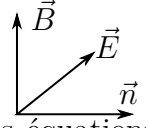


CONCOURS 2019 D'ENTRÉES AUX ENS FILIÈRE PC

COMPOSITION DE PHYSIQUE C¹

1. Pour une onde plane progressive, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont dans le plan d'onde et le trièdre $(\vec{n}, \vec{E}, \vec{B})$ est orthogonal direct.



2. Il s'agit de la traditionnelle démonstration de l'identité de Poynting à partir des équations de Maxwell. Comme $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, $\text{div } \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B})$. Dans le vide, les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère s'écrivent respectivement $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donc

$$\text{div } \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\boxed{\text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0} \quad .$$

3. Comme $\vec{n}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment une base orthogonale directe, $\vec{E} \wedge \vec{B} = EB \vec{n}$. De plus, $B = E/c$ donc

$$\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n} = \Pi \vec{n} \quad \text{avec} \quad \Pi = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c E^2 \quad .$$

En vue de la question suivante, on remarque que

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2c^2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad \text{donc} \quad u = \epsilon_0 E^2 \quad \text{et} \quad \boxed{\Pi = cu} \quad .$$

4. Le flux de $\vec{\Pi}$ à travers la surface infinitésimale $d\vec{S}$ s'exprime par $\vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \Pi dS \cos \theta$ et l'énergie traversant cette surface pendant dt s'écrit simplement

$$d\mathcal{E} = \Pi dS \cos \theta dt = u c dS \cos \theta dt \quad .$$

Dans le cas particulier où la surface est perpendiculaire à la direction de propagation, $d\vec{S}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires (et choisis de même sens) donc $\cos \theta = 1$ et on obtient $d\mathcal{E} = u c dS dt$.



5. Puisqu'un photon de longueur d'onde λ possède l'énergie hc/λ , on a

$$u_\lambda(\lambda) = n_\lambda(\lambda) \frac{hc}{\lambda} \quad \text{et par sommation sur les longueurs d'ondes} \quad u = \int_0^\infty u_\lambda(\lambda) d\lambda \quad .$$

6. On reprend l'expression de $d\mathcal{E}$ de la question 4 et on y remplace u par $u_\lambda d\lambda$ pour obtenir l'énergie $d\mathcal{E}_\lambda$ des photons de longueur d'onde comprise dans $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ traversant dS pendant dt . Comme $u_\lambda = n_\lambda \frac{hc}{\lambda}$, on obtient

$$d\mathcal{E}_\lambda = \frac{hc^2}{\lambda} n_\lambda dS \cos \theta dt \quad .$$

7. Pour parcourir toutes les directions en coordonnées sphériques, il faut faire varier θ dans $[0, \pi]$ et ϕ dans $[0, 2\pi[$. L'angle solide correspondant à toutes les directions de l'espace est donc

$$\Omega_0 = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = [-\cos \theta]_0^\pi \times 2\pi = 4\pi \quad .$$

8. Dans l'expression (5), on remplace n_λ par $N_\lambda d\Omega$ puis on identifie à la relation (6) pour trouver

$$I_\lambda = \frac{hc^2}{\lambda} N_\lambda \quad .$$

9. Il suffit d'utiliser l'expression (6) pour voir que

$$F_\lambda = \int_{\Omega_0} I_\lambda(\theta, \phi) \cos \theta d\Omega \quad .$$

10. Comme $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, la densité spectrale de flux sortant est

$$\begin{aligned} F_\lambda^+ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} B_\lambda \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi B_\lambda \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2\pi B_\lambda \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} \\ F_\lambda^+ &= 2\pi B_\lambda \times \frac{1}{2} = \pi B_\lambda \end{aligned}$$

Le flux total sortant (par unité de surface) s'obtient par intégration sur les longueurs d'onde.

$$F = \int_0^\infty F_\lambda^+ d\lambda = \pi \int_0^\infty B_\lambda d\lambda = \pi \int_0^\infty \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda$$

On utilise le changement de variable

$$x = \frac{hc}{\lambda kT} \quad d\lambda = -\frac{hc dx}{kT x^2}$$

pour faire apparaître l'intégrale fournie dans le préambule de l'énoncé.

$$F = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^4 c^5} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} T^4$$

On retrouve la loi de Stefan-Boltzmann en posant

$$\boxed{\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}} \quad .$$

11. La grandeur F est une puissance par unité de surface et F_λ^+ une puissance par unité de surface et par unité de longueur d'onde. On a donc

$$\mathcal{L} = 4\pi R^2 F \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_\lambda = 4\pi R^2 F_\lambda^+ \quad .$$

12. À la distance D , le flux d'énergie traverse une sphère de rayon D donc la puissance lumineuse par unité de surface est $\mathcal{L}/(4\pi D^2)$ et

$$\mathcal{W} = \frac{\mathcal{L}S}{4\pi D^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_\lambda = \frac{\mathcal{L}_\lambda S}{4\pi D^2} \quad .$$

Ce raisonnement simplifié est licite lorsque $D \gg R$, ce qui permet d'assimiler localement le rayonnement à une onde plane perpendiculaire à dS . En réalité, les photons émis par les différentes parties de la sphère source ne traversent pas dS sous le même angle ; il faudrait faire intervenir les angles φ et ψ et raisonner sur la grandeur I_λ dont l'énoncé a rappelé la propriété fondamentale : elle se conserve dans le parcours de la lumière de la source jusqu'au détecteur.

13. Dans le référentiel ($\mathcal{R}$) galiléen, les deux astres ne sont soumis qu'à leur interaction réciproque. Les équations du mouvement s'écrivent

$$M\ddot{\vec{R}}_E = \vec{F}_E \quad \text{et} \quad m\ddot{\vec{R}}_P = \vec{F}_P \quad \text{avec} \quad \vec{F}_E = -\vec{F}_P = \frac{GMm\vec{r}}{r^3} \quad .$$

14.

$$\vec{OC} = \frac{M\vec{R}_E + m\vec{R}_P}{M + m}$$

15. On dérive l'expression précédente et on utilise les résultats de la question 13.

$$\frac{d^2\vec{OC}}{dt^2} = \frac{M\ddot{\vec{R}}_E + m\ddot{\vec{R}}_P}{M + m} = \frac{\vec{F}_E + \vec{F}_P}{M + m} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \frac{d\vec{OC}}{dt} = \vec{Cste}$$

Le centre de masse C présente un mouvement rectiligne uniforme.

16.

$$\begin{cases} \vec{R}_C = \frac{M\vec{R}_E + m\vec{R}_P}{M + m} \\ \vec{r} = \vec{R}_P - \vec{R}_E \end{cases} \quad \text{se résout en} \quad \begin{cases} \vec{R}_P = \vec{R}_C + \frac{M}{M + m}\vec{r} \\ \vec{R}_E = \vec{R}_C - \frac{m}{M + m}\vec{r} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{r}_P = \vec{R}_P - \vec{R}_C = \frac{M}{M + m}\vec{r} \\ \vec{r}_E = \vec{R}_E - \vec{R}_C = -\frac{m}{M + m}\vec{r} \end{cases}$$

17.

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_P - \ddot{\vec{R}}_E = \frac{\vec{F}_P}{m} - \frac{\vec{F}_E}{M} = \vec{F}_P \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) = \vec{F}_P \frac{M + m}{mM} \quad \text{donc} \quad \frac{Mm}{m + M} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_P$$

On obtient la relation (10) de l'énoncé en prenant $\vec{F} = \vec{F}_P$, c'est la force gravitationnelle s'exerçant sur P .

Quand on aura trouvé $\vec{r}(t)$, on obtiendra les positions de E et P en utilisant les dernières équations de la question 16

$$\vec{r}_P = \frac{M}{M_t} \vec{r} \quad \vec{r}_E = -\frac{m}{M_t} \vec{r} \quad .$$

Autrement dit, si on place un point X tel que $\vec{C}\vec{F} = \vec{r}(t)$, les trajectoires de P et E se déduisent de celle de X par des homothéties de rapport M/M_t et $-m/M_t$.

Le problème de Képler défini au début de II.1 et formalisé dans la question 13 consiste à déterminer les mouvements *couplés de deux points matériels* : on cherche les vecteurs positions $\vec{R}_E$ et $\vec{R}_P$ et l'évolution de chacun d'eux dépend de l'autre au travers de la force d'interaction. Regardons maintenant l'équation (10). Comme $\vec{F}$ dépend de $\vec{r}$ mais pas de $\vec{R}_P$ et $\vec{R}_E$ séparément, elle se lit au contraire comme un problème à *un seul corps*, dans lequel on manipule un unique vecteur inconnu. On a donc bien « réduit » le problème de Képler initial.

18.

$$\vec{F} = -GMm \frac{\vec{e}_r}{r^2} = -GMm \frac{d}{dr} \left(\frac{-1}{r} \right) \vec{e}_r = -\text{grad} \left(-\frac{GMm}{r} \right)$$

En remarquant de $Mm = M_t\mu$, on peut donc introduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = -\frac{GM_t\mu}{r}$.

19. Le théorème du moment cinétique appliqué à X dans le référentiel barycentrique s'écrit

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{C}\vec{X} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad .$$

Comme $\vec{F}$ est colinéaire à $\vec{r}$, ce produit vectoriel est nul et donc $\vec{L}$ est constant. Par définition de $\vec{L}$, le vecteur position $\vec{r}$ est à tout instant perpendiculaire à ce vecteur constant. La trajectoire de X s'effectue donc dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}$.

20. Avec ces coordonnées cylindriques, $\vec{r} = r \vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ donc $\vec{L} = r\vec{e}_r \wedge \mu(\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta)$ qui donne $\vec{L} = L \vec{e}_z$ avec $L = \mu r^2 \dot{\theta}$.

21.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)^2 - \frac{G\mu M_t}{r} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r)$$

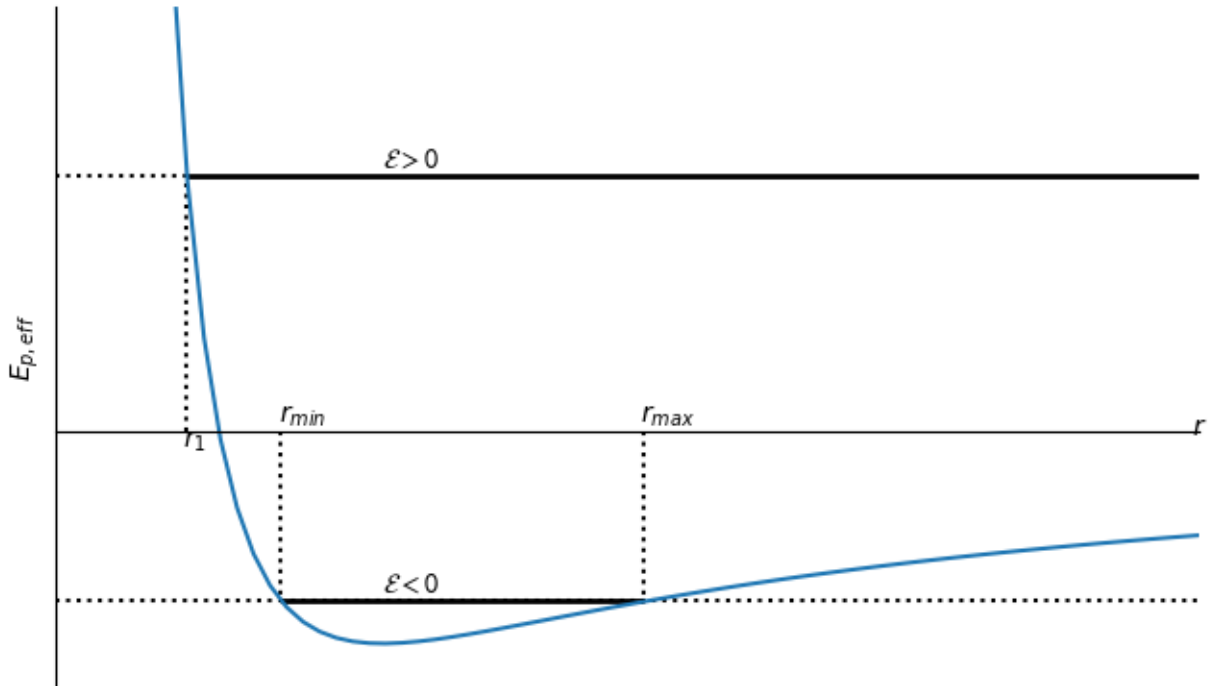
Dans cette expression, remplaçons $\dot{\theta}$ par $L/(\mu r^2)$. On obtient alors

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + \mathcal{E}_p(r) \quad .$$

On pose donc

$$\mathcal{E}_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + \mathcal{E}_p(r) \quad \text{pour écrire} \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}(r) \quad .$$

22. Comme $\dot{r}^2 \geq 0$, les valeurs accessibles à r sont telles que $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{p,eff}(r)$. Les valeurs de r telles que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{p,eff}(r)$ correspondent à $\dot{r} = 0$, c'est à dire à un extremum du mouvement radial. En s'appuyant sur le graphe de $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$, on voit que la nature de la trajectoire dépend du signe de $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E} > 0$, le point matériel X venant de l'infini s'approche jusqu'à la distance minimale r_1 puis s'éloigne pour repartir vers l'infini. On sait que sa trajectoire est dans ce cas une hyperbole. Si $\mathcal{E} < 0$, le point matériel X voit son mouvement borné par les rayons $r_{\min}$ et $r_{\max}$; il effectue des oscillations radiales et la trajectoire est une ellipse.



23. Les extremums $r_{\min}$ et $r_{\max}$ sont tels que $\dot{r} = 0$ donc $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{p,eff}(r)$. On en déduit l'équation du second degré

$$\frac{L^2}{2\mu}u^2 - GM_t\mu u - \mathcal{E} = 0$$

qui possède les solutions

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2L^2\mathcal{E}}{G^2M_t^2\mu^3}}}{\frac{L^2}{\mu^2GM_t}}$$

Posons

$$p = \frac{L^2}{GM_t \mu^2} \quad \text{et} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 \mathcal{E}}{G^2 M_t^2 \mu^3}} \quad .$$

On a alors

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e} \quad .$$

Comme $\mathcal{E} < 0$, $e < 1$. On s'est placé dans le cas où il existe effectivement deux extremums donc e est bien définie.

24.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}$$

En reprenant l'expression de l'énergie vue dans la question 21 on a donc

$$\mathcal{E} = \frac{\mu}{2} \frac{L^2}{\mu^2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu} u^2 - G\mu M_t u \quad .$$

On pose

$$A_1 = A_0 = \frac{L^2}{2\mu} \quad \text{et} \quad A_2 = -G\mu M_t \quad \text{pour écrire} \quad \mathcal{E} = A_0 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + A_1 u^2 + A_2 u \quad .$$

Comme l'énergie se conserve, on a $\frac{d\mathcal{E}}{d\theta} = 0$ ce qui donne

$$2A_0 u'(\theta) u''(\theta) + 2A_1 u(\theta) u'(\theta) + A_2 u'(\theta) = 0 \quad .$$

On simplifie par $u'(\theta)$ sur les intervalles où cette dérivée ne s'annule pas pour obtenir

$$u''(\theta) + u(\theta) = -\frac{A_2}{2A_0} \quad \text{c'est à dire} \quad u'' + u = \frac{GM_t \mu^2}{L^2} \quad .$$

Cette équation différentielle se résout en

$$u = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{1}{p} \quad .$$

On suppose que X passe au périastre pour $\theta = 0$ donc

$$u(0) = \frac{1+e}{p} \quad \text{et} \quad u'(0) = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0 \quad \text{et} \quad A = \frac{e}{p} \quad .$$

Finalement,

$$u = \frac{e}{\cos \theta + 1} \quad \text{et} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad .$$

25. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, $r_{\min} = r_{\max} = r_0$ donc $e = 0$ et

$$r_0 = p = \frac{L^2}{GM_t \mu^2} \quad .$$

Le moment cinétique s'exprime par $L = \mu r_0 v_0$ et comme il est constant v_0 l'est aussi.

$$v_0 = \frac{L}{\mu r_0} = \frac{\mu G M_t}{L}$$

En éliminant L , on retrouve l'expression familière $v_0 = \sqrt{\frac{GM_t}{r_0}}$. La vitesse angulaire est donnée par

$$\dot{\theta} = \omega_0 = \frac{v_0}{r_0} \quad \text{qui s'intègre en} \quad \theta = \omega_0 t + \theta_0 \quad .$$

26. Les équations horaires du mouvement sont $x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ et $y = r_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)$. Pour fixer θ_0 , choisissons $x(0) = r_0$ et $y(0) = 0$. On en déduit $\theta_0 = 0$ puis

$$x(t) = r_0 \cos \omega_0 t \quad y(t) = r_0 \sin \omega_0 t \quad .$$

Utilisons les résultats de la question 25 pour exprimer $\omega_0^2 r_0^3$.

$$\omega_0^2 r_0^3 = \frac{v_0^2}{r_0^2} r_0^3 = v_0^2 r_0 = \left(\frac{\mu G M_t}{L} \right)^2 \times \frac{L^2}{G M_t \mu^2} = G M_t \quad .$$

Ce résultat équivaut à la troisième loi de Képler.

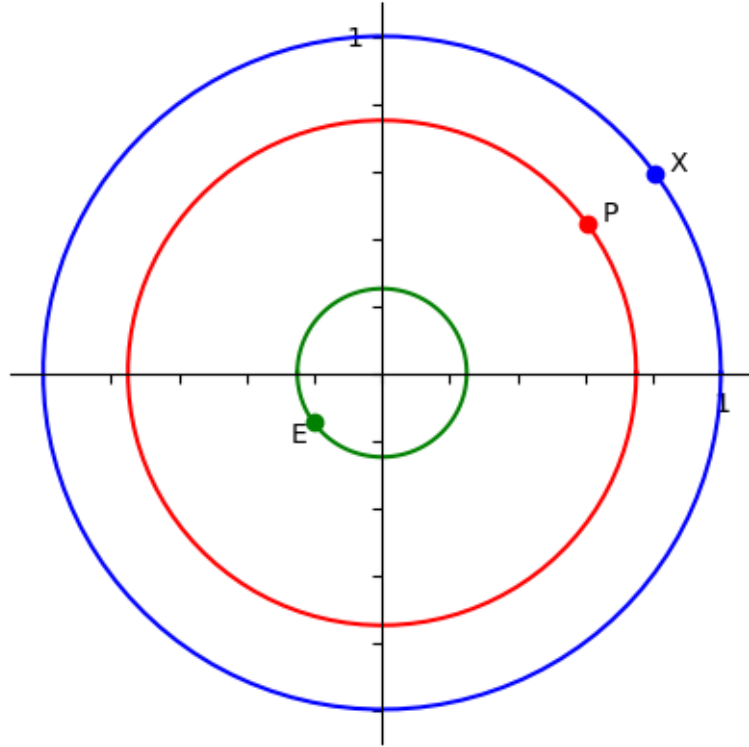
27.

$$\frac{M}{m+M} = \frac{1}{1+\beta} \quad \frac{m}{M+m} = \frac{\beta}{1+\beta}$$

En utilisant le résultat des question 16, 17 et 26 on obtient

$$\begin{cases} x_P = \frac{M}{M_t} r_0 \cos \omega t \\ y_P = \frac{M}{M_t} r_0 \sin \omega t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_E = -\frac{m}{M_t} r_0 \cos \omega t \\ y_E = -\frac{m}{M_t} r_0 \sin \omega t \end{cases} \quad .$$

28. Pour $\beta = 1/3$, $M/M_t = 3/4$ et $m/M_t = 1/4$. Les trajectoires de P et de E se déduisent de celle de X par des homothéties de rapports $3/4$ et $-1/4$.



29. Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ on a les projections suivantes

$$\vec{v}_E = \begin{pmatrix} -\frac{m}{M_T} r_0 \omega \sin \omega_0 t \\ \frac{m}{M_T} r_0 \omega \cos \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin i \\ \cos i \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad v_{\parallel} = -\frac{m}{M_T} r_0 \omega \sin i \cos \omega_0 t \quad .$$

30. Le signal de vitesse radiale présente l'amplitude et la période

$$K = \frac{m}{M_T} r_0 \omega_0 \sin i \quad \mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad .$$

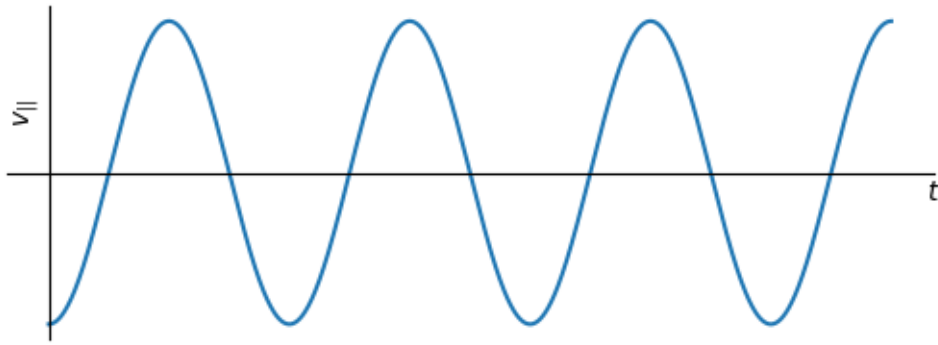
Pour mettre à profit la troisième loi de Képler sous la forme $\omega_0^2 r_0^3 = GM_t$, exprimons le produit $\mathcal{T}K^3$.

$$\mathcal{T}K^3 = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \left(\frac{m}{M_T} r_0 \omega_0 \sin i \right)^3 = \omega_0^2 r_0^3 \left(\frac{2\pi m^3 \sin^3 i}{M_T^3} \right) = GM_t \left(\frac{2\pi m^3}{M_T^3} \right) = \frac{2\pi G m^3 \sin^3 i}{M_T^2} = 2\pi G f$$

On peut encore écrire

$$\boxed{f = \frac{(m \sin i)^3}{(M + m)^2} = \frac{\mathcal{T}K^3}{2\pi G}} \quad .$$

On peut mesurer K et $\mathcal{T}$ et donc calculer numériquement f . Si la masse M est connue, on en déduit m .



31. Si $m \ll M$, $f \simeq (m \sin i)^3 / M^3$ donc

$$m \sin i \simeq (f M^2)^{1/3} = \left(\frac{\mathcal{T}K^3 M^2}{2\pi G} \right)^{1/3} \quad .$$

Comme $\sin i < 1$, on en déduit

$$m > m_{>} \quad \text{avec} \quad m_{>} = \left(\frac{\mathcal{T}K^3 M^2}{2\pi G} \right)^{1/3} = \left(\frac{\mathcal{T}M^2}{2\pi G} \right)^{1/3} K \quad .$$

Plus $\sin i$ est grand et plus K est élevé : il est donc plus facile de détecter la planète lorsque i est proche de $\pi/2$. Dans ce cas en effet, le plan de la trajectoire contient la droite de visée et l'effet Doppler est plus marqué. Plus M_T est petit, plus K est grand. Il vaut donc mieux que l'étoile soit légère. À nouveau cela est bien naturel : une étoile légère se déplace davantage sous l'effet de la planète P , ce qui provoque un effet Doppler plus visible.

32. Sur la figure 4 on lit $\mathcal{T} = 11$ jours et $K = 1,4 \text{ m.s}^{-1}$. On en déduit

$$m_{>} = 7.10^{24} \text{ kg} = 1,2 M_{\text{Terre}} \quad .$$

On peut retrouver la publication original en ligne et y lire la valeur $m_{>} = 1,27 M_{\text{Terre}}$. Compte tenu de l'imprécision dans la lecture de K et $\mathcal{T}$ sur la figure, on peut considérer qu'on a bien retrouvé ce résultat.

33. Il s'agit d'un simple calcul de développement limité au premier ordre :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{\parallel}}{c}}{1 - \frac{v_{\parallel}}{c}}} = \sqrt{1 + 2\frac{v_{\parallel}}{c} + o\left(\frac{v_{\parallel}}{c}\right)} \simeq 1 + \frac{v_{\parallel}}{c}$$

donc $\lambda_0 \simeq \lambda \left(1 + \frac{v_{\parallel}}{c}\right)$ et $\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} \simeq \frac{v_{\parallel}}{c} \quad .$

34. L'effet Doppler est bien connu en acoustique ; il explique par exemple le passage de l'aigu au grave de du son de la sirène d'une ambulance perçu par un observateur immobile au bord de la route.

35. La vitesse radiale varie entre deux valeurs extrêmes $v_{\max}$ et $v_{\min}$ associées à deux longueurs d'onde $\lambda_{\max}$ et $\lambda_{\min}$ telles que

$$\frac{\lambda_{\max} - \lambda}{\lambda} = \frac{v_{\max}}{c} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_{\min} - \lambda}{\lambda} = \frac{v_{\min}}{c} .$$

On en déduit

$$K = v_{\max} - v_{\min} = c \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda} = c \frac{\Delta \lambda_{\text{signal}}}{\lambda} .$$

Le spectromètre peut détecter la présence de l'exoplanète si $\Delta \lambda_{\text{signal}} \geq \Delta \lambda$ donc si

$$K \geq \frac{c \Delta \lambda}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda}{\Delta \lambda} \geq \frac{c}{K}$$

D'après la question 31,

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{m_{>}} \left(\frac{\mathcal{T} M^2}{2\pi G} \right)^{1/3} \quad \text{donc} \quad PR \geq \frac{c}{m_{>}} \left(\frac{\mathcal{T} M^2}{2\pi G} \right)^{1/3} .$$

36. Sur l'élément d'indice p , la partie spatiale de la phase de l'onde incidente vaut

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r}_p = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}_i \cdot pa \vec{e}_z = \frac{2\pi pa}{\lambda} \sin \theta_i \quad \text{donc} \quad \mathcal{E}_i(\vec{r}_p, t) = E_i e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_p - \omega t)} = E_i e^{ip\varphi_i} e^{-i\omega t} \quad \text{avec} \quad \boxed{\varphi_i = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta_i} .$$

37. En prenant garde au fait que θ_r est négatif, on calcule

$$\vec{k}_r \cdot \vec{r}_p = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}_r \cdot pa \vec{e}_z = -\frac{2\pi}{\lambda} pa \sin \theta_r = -p\varphi_r \quad \text{avec} \quad \boxed{\varphi_r = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta_r} \quad \text{puis}$$

$$\mathcal{E}_r^{(p)}(\vec{r}, t) = \rho E_i e^{ip\varphi_i} e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} e^{i\varphi_r} = \rho E_i e^{ip(\varphi_i + \varphi_r)} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} .$$

38. Comme chacun des éléments réfléchissants produit une onde plane donné par (24), l'onde totale s'exprime comme une somme d'ondes cohérentes

$$\mathcal{E}_r = \sum_{p=0}^{N-1} \mathcal{E}_r^{(p)} = \rho E_i \sum_{p=0}^{N-1} e^{ip\varphi} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\mathcal{E}_r = E_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{avec} \quad E_r = \rho E_i \sum_{p=0}^{N-1} e^{ip\varphi}$$

39. Le déphasage entre les ondes réfléchies par deux éléments adjacents est $\varphi = 2\pi a(\sin \theta_r + \sin \theta_i)/\lambda$. Il y a interférence constructive si $\varphi = 2q\pi$ avec $q \in \mathbb{Z}$ c'est à dire si

$$a(\sin \theta_r + \sin \theta_i) = q\lambda \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{Z} .$$

40. L'expression de E_r fait intervenir la somme des N premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\varphi}$.

$$E_r = \rho E_i \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = \rho E_i \frac{e^{iN\varphi/2} \times 2i \sin(N\varphi/2)}{e^{i\varphi/2} \times 2i \sin \varphi/2} = \rho E_i e^{i(N-1)\varphi/2} \frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2} .$$

Ce calcul n'est pas valide si $e^{iN\varphi} = 1$. Dans ce cas

$$E_r = \rho E_i \times N$$

et on peut considérer que cette expression constitue un prolongement par continuité de la précédente. L'intensité lumineuse s'obtient par

$$I = \frac{1}{\mathcal{E}_r} \mathcal{E}_r^* = \frac{1}{2} |\rho|^2 |E_i^2| \left(\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2} \right) \quad .$$

On pose

$$I_0 = \frac{1}{2} |\rho|^2 |E_i^2| \quad \kappa = \frac{\varphi}{2\pi a} = \frac{\sin \theta_r + \sin \theta_i}{\lambda} \quad R(\kappa) = \left(\frac{\sin(N\pi\kappa a)}{N \sin(\pi\kappa a)} \right)^2$$

pour écrire

$$I = I_0 N^2 R(\kappa) \quad .$$

41. Les maximums de la fonction R correspondent aux interférences constructives et sont obtenus lorsque $\pi\kappa a = q\pi$ avec $q \in \mathbb{Z}$, c'est à dire pour $\kappa_q = q/a$. On a donc $\Delta\kappa = 1/a$. Comme R est $1/a$ -périodique, on peut rechercher $\delta\kappa$ en étudiant le pic situé en $\kappa = 0$. De part et d'autre de ce pic, les premières annulations de R s'obtiennent lorsque $N\pi\kappa a = \pm\pi$ donc $\kappa = 1/(Na)$. L'écart entre ces deux valeurs est

$$\delta\kappa = \frac{2}{Na} \quad .$$

Le programme actuel invite à interpréter cette annulation de R par une construction de Fresnel

42. Pour $q = 0$, la relation (26) et la condition équivalente $\kappa = q/a$ donnent $\sin \theta_r + \sin \theta_i = 0$ donc $\theta_r = -\theta_i$. Cette direction est indépendant de λ donc la lumière n'est pas dispersée dans l'ordre 0.

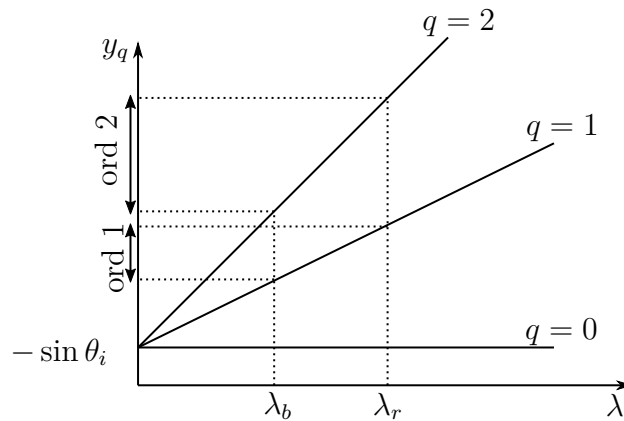
43. La condition d'interférence constructive dans l'ordre q donne

$$y_q = \sin \theta_r = -\sin \theta_i + q \frac{\lambda}{a} \quad .$$

Pour q donnée, le graphe de $y_q(\lambda)$ est une droite d'ordonnée à l'origine $-\sin \theta_i$ et de pente q/a . Les sinus des angles recouverts par l'ordre q sont l'image de l'intervalle $[\lambda_b, \lambda_r]$ par la fonction $y(\lambda)$. Sur la figure ci-dessous, les intervalles associés aux ordres 1 et 2 ne se recouvrent pas, mais ceux associés à d'autres couples d'ordres successifs le pourraient. Il y a recouvrement lorsque $y_q(\lambda_r) > y_{q+1}(\lambda_b)$ ce qui donne

$$-\sin \theta_i + q \frac{\lambda_r}{a} > -\sin \theta_i + (q+1) \frac{\lambda_b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{q}{q+1} > \frac{\lambda_b}{\lambda_r} \quad .$$

Pour HARPS, cette condition conduit à $q > 1,2$: il n'y a pas recouvrement des ordres 1 et 2 mais il y a recouvrement des ordres 2 et 3.



44. Le pic d'ordre q associé à la longueur d'onde λ est défini par

$$\kappa = \frac{q}{a} \quad \text{c'est à dire} \quad \sin \theta_r(q, \lambda) + \sin \theta_i = q \frac{\lambda}{a} \quad .$$

La première annulation à gauche du pic d'ordre q associé à la longueur d'onde $\lambda + \Delta\lambda$ est définie par

$$\kappa = \frac{q}{a} - \frac{\delta\kappa}{2} = \frac{q}{a} - \frac{1}{Na} \quad \text{c'est à dire} \quad \sin \theta'_r + \sin \theta_i = \left(q - \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda + \Delta\lambda}{a} \quad .$$

À la limite de résolution, $\sin \theta_r(\lambda, q) = \sin \theta'_r$ donc

$$q\lambda = \left(q - \frac{1}{N}\right) (\lambda + \Delta\lambda) \quad .$$

En négligeant le terme d'ordre 2 $\Delta\lambda/N$, on en déduit

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = qN \quad .$$

Il vaut donc mieux choisir un ordre élevé. Pour respecter la condition (20) de la question 35, on choisira

$$q \geq \frac{c}{Nm_{>}} \left(\frac{\mathcal{T}M^2}{2\pi G} \right)^{1/3}$$

45. Cette question fait implicitement appel au principe de Huygens-Fresnel qui ne figure pas au programme de PC* en 2019. De ce fait, il n'est pas facile de justifier clairement l'expression proposée par l'énoncé. Décomposons l'élément réfléchissant en bandes infinitésimales de largeur $d\xi$, où $\xi \in [-\epsilon/2, \epsilon/2]$ désigne la position de cette bande par rapport au centre de l'élément. Cette bande infiniment étroite peut être traitée comme dans la question (37) mais, puisqu'elle est décalée, l'onde qu'elle produit présente un déphasage. Pour un décalage de longueur a , le déphasage est φ . Par proportionnalité, le déphasage associé au décalage ξ vaut $\xi\varphi/a$ et cet élément produit une onde dont l'expression se déduit de (24) et proportionnelle $d\xi$:

$$d\mathcal{E}_r^{(p)} \propto \rho E_i e^{ip\varphi} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{i\xi\varphi/a} d\xi \quad .$$

On choisit un facteur de proportionnalité égale à $1/\epsilon$, ce qui permet de retrouver le résultat de la question (37) dans la limite où $\epsilon \rightarrow 0$. En sommant les contributions infinitésimales, on obtient

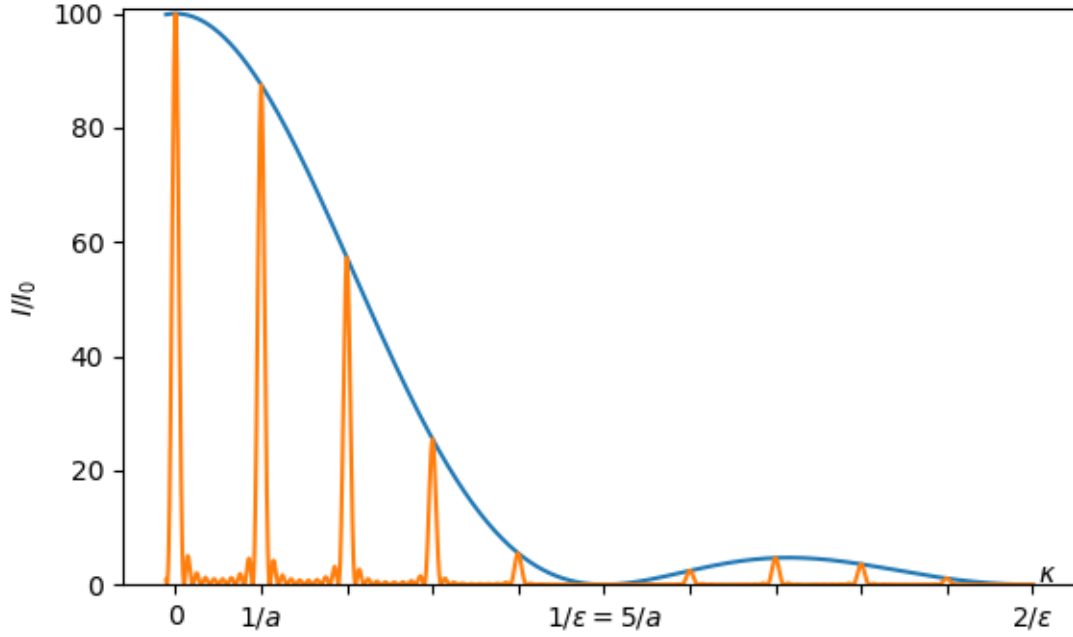
$$\mathcal{E}_r^{(p)} = \rho E_i e^{ip\varphi} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} e^{i\xi\varphi/a} \frac{d\xi}{\epsilon}$$

46.

$$\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} e^{i\xi\varphi/a} \frac{d\xi}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{a}{i\varphi} e^{i\varphi\xi/a} \right]_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} = \frac{a}{i\varphi\epsilon} \times 2i \sin \left(\frac{\varphi\epsilon}{2a} \right) = \frac{\sin \pi\kappa\epsilon}{\pi\kappa\epsilon}$$

Par rapport à la question 37, $\mathcal{E}_r^{(p)}$ est multiplié par cette fraction. Les calculs se déroulent ensuite comme dans les questions 38 et 40, l'intensité étant finalement multipliée par le carré de cette fraction pour obtenir

$$I(\theta_r) = I_0 N^2 R(\kappa) F(\kappa) \quad \text{avec} \quad F(\kappa) = \left[\frac{\sin \pi\kappa\epsilon}{\pi\kappa\epsilon} \right]^2$$



Les ordres de diffraction correspondent aux maximums de la fonction R et ont les abscisses $\kappa = q/a$ avec $q \in \mathbb{Z}$. À cause de la présence en facteur de la fonction F , tous les ordres ne présentent pas la même intensité. Comme F est maximale pour $q = 0$, c'est l'ordre 0 qui présente l'intensité maximale. Pour cet ordre nul, on a $\kappa = 0$ donc $\sin \theta_r = -\sin \theta_i$: cette direction correspond à celle de la loi de Descartes sur la réflexion.

47. Pour travailler à fort pouvoir de résolution, il faut travailler dans un ordre q élevé. Mais on constate sur le graphe précédente que l'intensité des ordres élevés est très faible, à tel point qu'on risque de ne pas la détecter.

48. L'angle d'incidence sur la facette réfléchissante est $\alpha_i = \theta_i - \gamma$ et l'angle de réflexion est $\alpha_r = \theta_r - \gamma$. Le maximum de F_γ est donné par la loi de Descartes $\alpha_r = -\alpha_i$ d'où $\theta_{r,\max} = 2\gamma - \theta_i$.

49. En incidence normale, $\theta_i = \gamma$ donc $\theta_{r,\max} = \gamma$. L'ordre correspondant est

$$q_{\max} = \frac{a(\sin \theta_r + \sin \theta_i)}{\lambda} = \frac{2a \sin \gamma}{\lambda} \quad \text{et inversement} \quad \lambda_{\max} = \frac{2a \sin \gamma}{q}.$$

50.

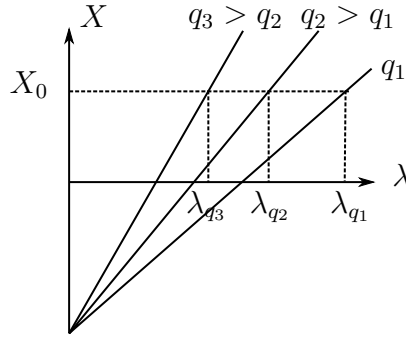
$$q_{\max}(\lambda_r) = 88 \quad q_{\max}(\lambda_b) = 162$$

51. Comme $X = 0$ correspond à $\theta_r = \theta_{r,\max}$, la direction d'angle $\theta_r = \theta_{r,\max} + \delta\theta$ forme l'angle $\delta\theta$ avec l'axe optique de la lentille. Tous les rayons présentant cette direction convergent au point focal de la lentille obtenu en traçant la droite passant par son centre optique et formant l'angle $\delta\theta$ avec son axe optique. Donc $X = f' \tan \delta\theta \simeq f' \delta\theta$.

52. Comme $\theta_r = \theta_{r,\max} + \delta\theta = \gamma + \delta\theta$, un développement de Taylor au premier ordre donne $\sin \theta_r = \sin \gamma + \delta\theta \cos \gamma$. Avec $\theta_i = \gamma$, la relation définissant les ordres du réseau s'écrit

$$a(\sin \gamma + \sin \gamma + \delta\theta \cos \gamma) = q\lambda \quad \text{d'où} \quad \delta\theta = \frac{1}{\cos \gamma} \left(\frac{q\lambda}{a} - 2 \sin \gamma \right) \quad \text{et} \quad X = f' \delta\theta$$

fournit la réponse (31).



Cette courbe illustre la propriété décrite par l'énoncé : à une position X_0 donnée correspond un ensemble de longueurs d'onde λ_q .

53. L'angle apparent entre P et E est maximal lorsque P se trouve sur (Ex) et il vaut alors $\delta = \arctan(r_0/D)$. On peut supposer que D est très supérieur à r_0 de sorte que $\delta \simeq r_0/D$.

54. La position de P la plus favorable à la survenue du transit se présente lorsque, dans son mouvement de rotation autour de E , cette planète se trouve sur la partie gauche l'axe (Ey) , comme sur la figure 9. Il est observable si P pénètre dans le cône de sommet O tangent à la sphère E , de demi-angle au sommet δ .

Soit h la distance HP entre le centre de P et la droite (OE) et h' la hauteur HK du cône «en dessous» de P . On a

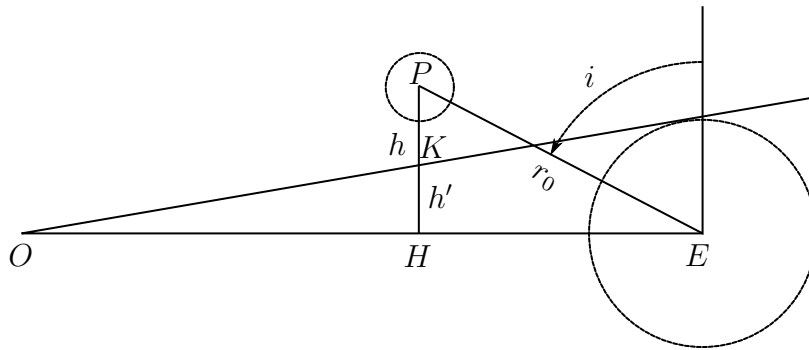
$$h = r_0 \cos i \quad \text{et} \quad h' = \tan \delta \, OH = \tan \delta (D - r_0 \sin i) \quad .$$

Le transit s'observe si $h - a < h'$ ce qui conduit à

$$r_0(\cos i + \tan \delta \sin i) < a + D \tan \delta \quad .$$

Comme $\delta \simeq R/D$ est petit, cette condition devient

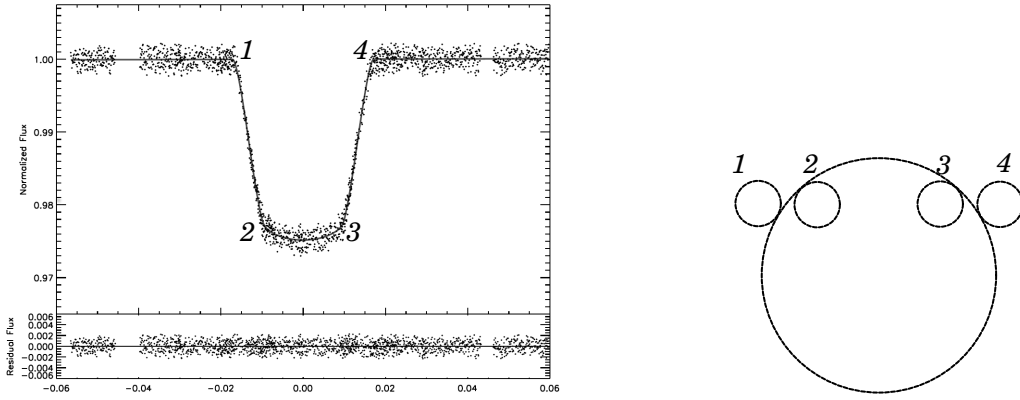
$$r_0 \cos i < a + R \quad \text{ou encore} \quad r_0 \cos i < a \quad \text{si} \quad a \ll R \quad .$$



55. Soit $i_0 = \arccos(\frac{a+R}{r_0})$ l'angle limite permettant l'observation du transit. Parmi tous les angles de $[-\pi/2, \pi/2]$ (intervalle de longueur π), seuls ceux compris dans $[-\pi/2, -i_0] \cup [i_0, \pi/2]$ conviennent (réunion de longueur $2 \times (\pi/2 - i_0)$). Comme la densité de probabilité des angles est supposée uniforme, la probabilité d'observer un transit est donnée par

$$\mathbb{P} = \frac{2 \times (\pi/2 - i_0)}{\pi} = 1 - \frac{2i_0}{\pi} \quad .$$

56. Le premier contact correspond au début d'entrée du disque planétaire dans le disque stellaire, le second à son entière inclusion dans le disque stellaire, le troisième à la fin de cette inclusion et le quatrième à sa sortie.



57. Selon le résultat de la question 12, on a

$$\mathcal{W}_{\lambda,0} = \frac{S\mathcal{L}_{\lambda}}{4\pi D^2} \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_{\lambda} = 4\pi R^2 F_{\lambda}^+ \quad \text{et} \quad F_{\lambda}^+ = \pi B_{\lambda} \quad \text{donc} \quad \mathcal{W}_{\lambda,0} = \frac{S\pi R^2 B_{\lambda}}{D^2} .$$

Dans cette expression πR^2 représente l'aire du disque stellaire. Lorsque la planète est au milieu de son transit, elle en occulte une partie. Comme $D \gg r_0$, on assimile l'aire occultée à celle du disque planétaire, c'est à dire à πa^2 . Un raisonnement rigoureux nécessiterait de délimiter plus précisément la partie de l'étoile qui irradie le capteur et d'utiliser F_{λ}^+ . Mais l'énoncé semble attendre un argument simple ne faisant pas intervenir r_0 . Pour obtenir $\mathcal{W}_{\lambda}$, on remplace donc πR^2 par $\pi R^2 - \pi a^2$:

$$\mathcal{W}_{\lambda} = \frac{S\pi(R^2 - a^2)B_{\lambda}}{D^2} .$$

58. À partir des relations précédentes on obtient facilement

$$\frac{\mathcal{W}_{\lambda,0} - \mathcal{W}_{\lambda}}{\mathcal{W}_{\lambda,0}} = \frac{a^2}{R^2} \quad \text{et} \quad a = R \sqrt{\frac{\mathcal{W}_{\lambda,0} - \mathcal{W}_{\lambda}}{\mathcal{W}_{\lambda,0}}}$$

Pour Jupiter devant le Soleil, on obtient une baisse de 1% et pour la Terre devant le Soleil, une baisse de 8.10^{-5} .

Pour HD198733, on lit sur la figure 10

$$\frac{\mathcal{W}_{\lambda,0} - \mathcal{W}_{\lambda}}{\mathcal{W}_{\lambda,0}} = 0,025 \quad \text{d'où} \quad r = 0,16R = 9.10^7 \text{ m} .$$

La publication originale donne $a/R = 0,15464$.

59. Si $R \ll r_0$ la courbure de la trajectoire pendant la traversée sur disque stellaire est imperceptible.

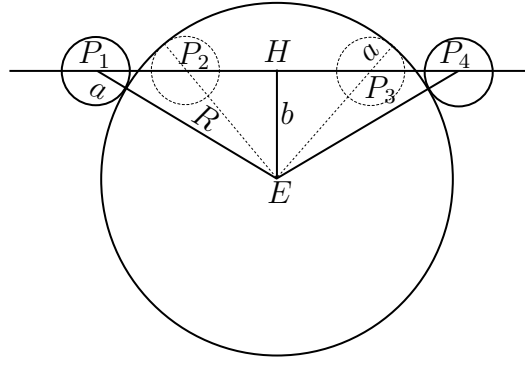
60. Entre premier et le quatrième contacts, P doit parcourir la distance $P_1P_4 = 2P_1H$. Au premier contact, les disques stellaire et planétaire sont tangents et $P_1E = a + R$. D'après le théorème de Pythagore on a $(a + R)^2 = P_1H^2 + b^2$ donc

$$P_1H = \sqrt{(a + R)^2 - b^2} .$$

La vitesse de P sur son orbite est $v = 2\pi r_0/\mathcal{T}$. Pour parcourir P_1P_4 , il lui faut la durée

$$\Delta t_{\text{tot}} = \frac{2P_1H}{v} = \frac{\mathcal{T}}{\pi r_0} \sqrt{(a + R)^2 - b^2} .$$

La durée séparant le second du troisième contact s'obtient par un raisonnement analogue mais, comme la tangence des disques se fait « par l'intérieur », $EP_1 = EP_4 = (R + a)$ est remplacé par $EP_1 = EP_3 = (R - a)$ dans le théorème de Pythagore.



61. Soit $\mu = \left(\frac{\Delta t_{tot}}{\Delta t_{full}}\right)^2$. On calcule facilement

$$\mu = \frac{(R+a)^2 - b^2}{(R-a)^2 - b^2} \quad \text{d'où } b = \sqrt{\frac{\mu(R-a)^2 - (R+a)^2}{\mu - 1}}$$

Pour $a \ll R$, on obtient au premier ordre

$$\frac{b}{R} = 1 - \frac{a}{R} \frac{\mu + 1}{\mu - 1} \quad .$$

Pour HD189733b, on a calculé a/R dans la question 58 et on lit sur la figure 10 $\Delta t_{tot}/\Delta t_{full} = 1,8$. On en déduit $\mu = 3,24$ puis $b/R = 0,7$. Ce résultat est conforme à la publication originale qui donne une valeur de 0,65.

62.

$$\Delta t_{tot} = \frac{\mathcal{T}}{\pi r_0} \sqrt{(R + 0,16R)^2 - 0,7^2 R^2} = \frac{\mathcal{T}R}{\pi r_0} \times 0,92 \quad \boxed{r_0 = \frac{0,92\mathcal{T}R}{\pi\Delta t_{tot}} = 5.10^9 \text{ m}}$$

À nouveau, ce résultat est conforme à la publication qui donne $r_0/R = 8,9$.

63. Le paramètre d'impact b est la distance qui nous avons notée h sur la figure de la question 54. On a $b = r_0 \cos i$.

$$\cos i = \frac{b}{r_0} = \frac{0,7R}{r_0} = 0,078 \quad i = 85^\circ \quad \text{comme dans l'article.}$$

64. On peut utiliser la masse de l'étoile par la troisième loi de Képler

$$M = \frac{4\pi^2 r_0^3}{G\mathcal{T}^2} = 2.10^{30} \text{ kg} \quad .$$

65. En général, le capteur reçoit le rayonnement émis par E et celui émis par P . Lorsque P passe derrière E , il reçoit uniquement le rayonnement émis par l'étoile.

66. Pour tout λ , $B_\lambda(T)$ croît avec T . Donc $B_\lambda(T_\star) > B_\lambda(T_P)$.

67. On reprend le rayonnement des questions 11 et 12 en se rappelant que $F_\lambda^+ = \pi B_\lambda$. En disjonction, on additionne les contributions de l'étoile et de la planète.

$$\mathcal{W}_{\lambda,d} = \frac{4\pi R^2}{4\pi D^2} \pi B_\lambda(T_\star) S + \frac{4\pi a^2}{4\pi D^2} \pi B_\lambda(T_P) S = \alpha(R^2 B_\lambda(T_\star) + a^2 B_\lambda(T_P))$$

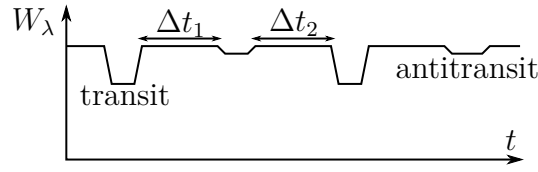
Pendant le transit, la contribution de l'étoile est réduite comme on l'a déjà vu dans la question 57.

$$\mathcal{W}_{\lambda,t} = \alpha(R^2 - a^2) B_\lambda(T_\star) + \alpha a^2 B_\lambda(T_P) = \mathcal{W}_{\lambda,d} - \alpha a^2 B_\lambda(T_\star) \quad .$$

En antitransit, il ne reste que la contribution de l'étoile.

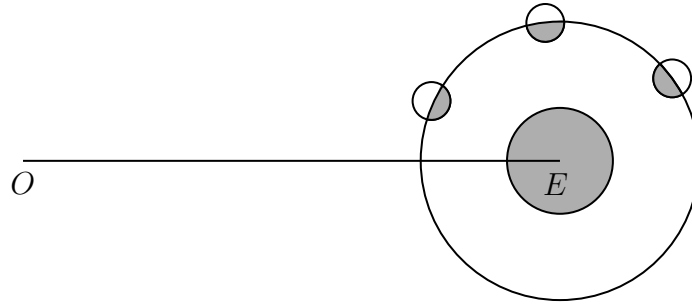
$$\mathcal{W}_{\lambda,t} = \alpha R^2 B_\lambda(T_\star) = \mathcal{W}_{\lambda,d} - \alpha a^2 B_\lambda(T_P) \quad .$$

68. Les expressions précédentes montrent que $W_{\lambda,d} > W_{\lambda,a} > W_{\lambda,t}$. Pendant le transit, la réduction est bien plus forte que pendant l'antitransit car $B_{\lambda}(T_*)$ est bien plus grand que $B_{\lambda}(T_P)$.

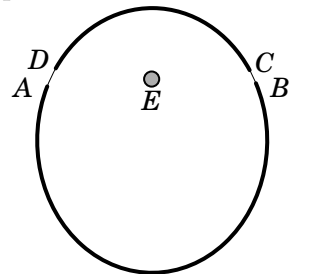


69. Selon le modèle développé ici, le signal devrait rester constant pendant la disjonction. Mais sur la partie inférieure de la figure 11, on voit que ce n'est pas le cas en réalité : il augmente en allant du transit à l'antitransit, et décroît en allant de l'antitransit au transit.

Une lacune du modèle pouvant expliquer ce désaccord réside dans l'hypothèse selon laquelle la température est uniforme sur toute la surface de la planète. En réalité, sa moitié éclairée par l'étoile (où il fait jour) est plus chaude que celle qui est dans l'ombre (où il fait nuit) et elle rayonne donc davantage. Selon les instants, on voit depuis la Terre une portion plus ou moins grande de la partie de P où il fait jour. Sur le dessin ci-dessous, la partie de P où il fait jour a été représentée en gris. On remarque que c'est juste avant l'antitransit qu'on l'aperçoit le mieux depuis la Terre, ce qui explique que W_{λ} soit maximale à cet instant.



70. L'orbite de P est une ellipse dont le centre de E occupe un foyer, et non pas le centre. Entre le transit et l'antitransit, P doit parcourir AB . Entre l'antitransit et le transit suivant, elle doit parcourir CD . On a noté Δt_1 et Δt_2 les temps de parcours correspondant sur la figure de la question 68. Pour une trajectoire circulaire de centre E , ces temps sont égaux. Mais pour une orbite excentrique on a $\Delta t_1 > \Delta t_2$, avec un écart d'autant plus marqué que l'ellipse présente une forte excentricité, c'est à dire qu'elle est plus allongée. De la comparaison de ces deux durées, on doit en principe pouvoir déduire l'excentricité. Sur figure 11, l'écart entre ces deux temps n'est pas perceptible donc HAT-P7b présente une faible excentricité.



71. Cette question concerne l'évaluation des incertitudes par la méthode type A. À chaque orbite, on mesure la chute relative de puissance. Le résultat fluctue d'un coup sur l'autre, comme il est courant pour une mesure que l'on répète et sur lesquelles des grandeurs d'influence occasionnent des variations aléatoires dont l'incertitude-type est $u(S)$. Pour l'antitransit de la figure 11, S est voisin de 0,006 et $u(s)$ de l'ordre de 0,0001. Après avoir effectué N_t fois la mesure de S , on calcule la moyenne $\bar{S}$ et on sait que

$$u(\bar{S}) = \frac{u(S)}{\sqrt{N_t}}.$$

Pour la détection de l'antitransit, on est confronté aux mêmes fluctuations, l'incertitude sur chaque mesure est la même mais la grandeur à mesurer est en gros 50 fois plus petite comme on le voit sur la partie supérieure de la figure 11. Pour obtenir le même rapport signal sur bruit, il faut donc atteindre une incertitude 50 fois plus petite. Puisque l'incertitude varie en $1/\sqrt{N}$, il faudra pendre $N_a = 50^2 N = 2500 N_t$.

Si la période de révolution est de plusieurs jours, il paraît donc difficilement envisageable d'atteindre le même rapport signal sur bruit. Dans l'article de Borucki *et al*, on peut lire que le signal de transit vaut 6726 ± 11 ppm et que celui de l'antitransit vaut 130 ± 11 ppm. Je constate que l'auteur donne la même incertitude pour les deux, mais pas la même incertitude relative !