

I. Excitation paramétrique d'un pendule simple

1. On pourra supposer le pendule simple si :

- la masse de la tige est faible devant la masse du point M
- la longueur l de la tige est grande devant la longueur caractéristique de la masse m

2. Dans R_0 galiléen, on applique la loi scalaire du moment cinétique (LSMC) au pendule { tige sans masse + masse m en M } par rapport à l'axe fixe Ay :

$$\frac{dL(Ay)}{dt} = \mathcal{M}_{\text{ext} \rightarrow \text{pendule}}(Ay)$$

$$\text{On a : } L(Ay) = \vec{L}(A) \cdot \vec{u}_y = (\vec{AM} \wedge m \vec{v}_{M/R_0}) \cdot \vec{u}_y = (l \vec{m}' \wedge m l \dot{\theta} \vec{e}) \cdot \vec{u}_y = m l^2 \ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_{\text{ext} \rightarrow \text{pendule}}(Ay) = \mathcal{M}_{\text{liaison}}(Ay) + \mathcal{M}_{\text{poids}}(Ay)$$

$$= 0 \text{ (liaison parfaite)} - m g l \frac{\sin \theta}{\text{bras de levier du poids}}$$

$$\text{donc : } m l^2 \ddot{\theta} = -m g l \sin \theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0} \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

3. Pour de petits angles, on a des oscillations sinusoïdales de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\text{A.N : } T_0 = 0,9 \text{ s}$$

4. On se place dans le référentiel non galiléen R_1 où l'axe Ay est fixe

$$\text{On ajoute la force d'inertie d'entraînement : } \vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_{R_1/R_0} = -m \ddot{h} \vec{u}_z$$

On peut alors reprendre l'équation de la question 2 en remplaçant g par $g - \ddot{h}$

$$\Rightarrow m l^2 \ddot{\theta} = -m (g - \ddot{h}) l \sin \theta \Rightarrow l \ddot{\theta} = -g (1 - \frac{\ddot{h}}{g}) \sin \theta \quad \text{On pose : } G = \frac{\ddot{h}}{g}$$

$$\text{d'où : } \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 - G) \sin \theta = 0}$$

5. Dans R_0 galiléen, on applique la loi de la quantité de mouvement (LQDM) au pendule :

$$m \vec{a}_{M/R_0} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{pendule}} = m \vec{g} + \vec{R} \quad \text{donc : } \vec{R} = m (\vec{a}_{M/R_0} - \vec{g})$$

$$\text{On a : } \vec{OM} = (h + l \cos \theta) \vec{u}_z + l \sin \theta \vec{u}_x$$

$$\vec{v}_{M/R_0} = (\dot{h} - l \dot{\theta} \sin \theta) \vec{u}_z + l \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_x$$

$$\vec{a}_{M/R_0} = (\ddot{h} - l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta) \vec{u}_z + (l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta) \vec{u}_x$$

$$\text{donc : } \vec{R} = m \begin{pmatrix} \ddot{h} - l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta - g \\ l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{On remplace : } \begin{cases} \ddot{h} \text{ par } Gg \text{ et } l \text{ par } \frac{g}{\omega_0^2} \\ \ddot{\theta}^2 \text{ par } U \omega_0^2 \\ \ddot{\theta} \text{ par } -\omega_0^2 (1 - G) \sin \theta \end{cases}$$

$$\vec{R} = m \begin{pmatrix} Gg + \frac{g}{\omega_0^2} \cdot \omega_0^2 (1 - G) \sin^2 \theta - \frac{g}{\omega_0^2} U \omega_0^2 \cos \theta - g \\ \frac{g}{\omega_0^2} (-\omega_0^2 (1 - G) \sin \theta) \cos \theta - \frac{g}{\omega_0^2} U \omega_0^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = m g \begin{pmatrix} G - 1 + (1 - G) \sin^2 \theta - U \cos \theta \\ -(1 - G) \sin \theta \cos \theta - U \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{R}' = mg \begin{vmatrix} (1-G)(\sin^2\theta - 1) - U \cos\theta \\ -(1-G)\sin\theta \cos\theta - U \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} = mg \begin{vmatrix} -(1-G)\cos^2\theta - U \cos\theta \\ -(1-G)\sin\theta \cos\theta - U \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

Finalement: $\boxed{\vec{R}' = -mg \left[\cos\theta \left((1-G)\cos\theta + U \right) \vec{v}_y + \sin\theta \left((1-G)\cos\theta + U \right) \vec{v}_x \right]}$

6. $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ est un infiniment petit d'ordre 1, donc $U = \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2}$ est d'ordre 2.

On a: $\vec{R}' \approx -mg \begin{vmatrix} (1-\frac{\theta^2}{2}) \left[(1-G)(1-\frac{\theta^2}{2}) + U \right] \\ \theta \left[(1-G)(1-\frac{\theta^2}{2}) + U \right] \\ 0 \end{vmatrix}$ $(1-\frac{\theta^2}{2})^2 \approx 1 - \theta^2$ à l'ordre 2
 $\theta \cdot U$ est d'ordre 3 donc négligeable

Il reste: $\boxed{\vec{R}' = -mg \left[\left((1-G)(1-\theta^2) + U \right) \vec{v}_y + (1-G)\theta \vec{v}_x \right]}$

7. $P(t) = \vec{R}' \cdot \vec{v}_{A/R_0} = \vec{R}' \cdot \dot{h} \vec{v}_y$ donc: $\boxed{P(t) = -mg \left[(1-G)(1-\theta^2) + U \right] \dot{h}}$

8. $P(t) = -mg \left[1 - \theta^2 + \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} \right] \dot{h}$
 $= -mg \left[1 - A^2 \sin^2 \omega_0 t + A^2 \cos^2 \omega_0 t \right] a \Omega \cos(\Omega t + \Phi)$

$\boxed{P(t) = -mga \Omega \left[1 + A^2 \cos 2\omega_0 t \right] \cos(\Omega t + \Phi)}$

9. $P(t) = -mga \Omega \left[\cos(\Omega t + \Phi) + \frac{A^2}{2} \cos((2\omega_0 + \Omega)t + \Phi) + \frac{A^2}{2} \cos((2\omega_0 - \Omega)t - \Phi) \right]$

Les deux premiers cos ne peuvent pas être constant en moyenne sur $[t, t+T_0]$
 Le troisième peut l'être si: $2\omega_0 - \Omega = 0$. La condition est donc: $\underline{h = 2}$

On a alors: $P(t) = -mga \Omega \left[\underbrace{\cos(2\omega_0 t + \Phi)}_{= 0 \text{ en moyenne}} + \frac{A^2}{2} \underbrace{\cos(4\omega_0 t + \Phi)}_{= 0 \text{ en moyenne}} + \frac{A^2}{2} \cos \Phi \right]$

donc: $P_m = -mga \Omega \cdot \frac{A^2}{2} \cos \Phi$ soit: $\boxed{P_m = -mga \omega_0 A^2 \cos \Phi}$

• P_m maximale si $\cos \Phi = -1$ donc: $\underline{\Phi = \pi [2\pi]}$

• $\boxed{P_m^* = mga \omega_0 A^2}$

10. Maintenant: $P(t) = -mg \left[(1-G)(1 - A^2 \sin^2 \omega_0 t) + A^2 \cos^2 \omega_0 t \right] a \cdot 2\omega_0 \cdot \cos(2\omega_0 t + \Phi)$

$P(t) = -mga \cdot 2\omega_0 \left[1 + A^2 \cos 2\omega_0 t - G(1 - A^2 \sin^2 \omega_0 t) \right] \cos(2\omega_0 t + \Phi)$

$= P(t)_{\text{question 8}} + mga \cdot 2\omega_0 \cdot G(1 - A^2 \sin^2 \omega_0 t) \cdot \cos(2\omega_0 t + \Phi)$

$= P(t)_{\text{question 8}} + mga \cdot 2\omega_0 \cdot G \left(1 - A^2 \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2} \right) \cdot \cos(2\omega_0 t + \Phi)$

$= P(t)_{\text{question 8}} + mga \cdot 2\omega_0 \cdot G \left[\left(1 - \frac{A^2}{2} \right) \cos(2\omega_0 t + \Phi) + \frac{A^2}{2} \cos 2\omega_0 t \cdot \cos(2\omega_0 t + \Phi) \right]$

$= P(t)_{\text{question 8}} + mga \cdot 2\omega_0 \cdot G \left[\left(1 - \frac{A^2}{2} \right) \cos(2\omega_0 t + \Phi) + \frac{A^2}{4} \cos(4\omega_0 t + \Phi) + \frac{A^2}{4} \cos \Phi \right]$

$$\text{On: } G = \frac{\ddot{h}}{g} = -\frac{a 4\omega_0^2 \sin(2\omega_0 t + \phi)}{g}$$

$$P(t) = P(t)_{\text{question 8}} - 8m a^2 \omega_0^3 \sin(2\omega_0 t + \phi) \left[\left(1 - \frac{A^2}{2}\right) \cos(2\omega_0 t + \phi) + \frac{A^2}{4} \cos(4\omega_0 t + \phi) + \frac{A^2}{4} \cos \phi \right]$$

$$\text{On a: } \sin(2\omega_0 t + \phi) \cos(2\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2} \sin(4\omega_0 t + 2\phi) \text{ de valeur moyenne nulle}$$

$$\cdot \sin(2\omega_0 t + \phi) \cos(4\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2} (\sin(6\omega_0 t + 2\phi) - \sin 2\omega_0 t) \text{ de valeur moyenne nulle}$$

$$\cdot \sin(2\omega_0 t + \phi) \text{ de valeur moyenne nulle}$$

Conclusion: Le terme supplémentaire est de valeur moyenne nulle. La puissance moyenne P_m est inchangée

11. On calcule tout d'abord l'énergie mécanique moyenne E_m du pendule sur $[t, t + T_0]$

$$\begin{aligned} E &= E_c + E_p = \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/R_0}^2 - mg z_M \\ &= \frac{1}{2} m [(\dot{h} - l \dot{\theta} \sin \theta)^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta] - mg(h + l \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{h}^2 - 2l \dot{h} \dot{\theta} \sin \theta + l^2 \dot{\theta}^2] - mgh - mgl \cos \theta \\ &\approx \frac{1}{2} m [\dot{h}^2 - 2l \dot{h} \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2] - mgh - mgl \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \text{ à l'ordre 2 en } \theta \text{ et } \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \end{aligned}$$

Dans les conditions les plus favorables: $\begin{cases} \phi = \pi \\ \Omega = 2\omega_0 \end{cases}$ donc: $\begin{cases} \dot{h} = -a \sin(2\omega_0 t) \\ \ddot{h} = -2a\omega_0 \cos(2\omega_0 t) \end{cases}$

$$\text{On a: } \theta = A(t) \sin \omega_0 t \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{A}(t) \sin \omega_0 t + A(t) \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\text{on: } \left| \frac{\dot{A}}{A\omega_0} \right| \sim \frac{\frac{A}{\tau_A}}{A\omega_0} \text{ où } \tau_A \text{ est le temps caractéristique des variations de } A$$

$$= \frac{1}{\tau_A \omega_0} = \frac{T_0}{\tau_A} \ll 1 \text{ car les variations de } A \text{ sont lentes}$$

$$\text{donc: } \dot{\theta} \approx A\omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \left[4a^2 \omega_0^2 \cos^2(2\omega_0 t) + l^2 A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + 2l \cdot 2a\omega_0 \cdot A\omega_0 \cos(2\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \sin(\omega_0 t) \right] \\ &\quad + mga \sin(2\omega_0 t) - mgl \left(1 - \frac{1}{2} A^2 \sin^2 \omega_0 t\right) \end{aligned}$$

$$\text{On a: } \langle \cos^2(2\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\cdot \langle \cos^2(\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\cdot \langle 4 \cos(2\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \rangle = \langle 2 \cos(2\omega_0 t) \cdot \sin(2\omega_0 t) \rangle = \langle \sin(4\omega_0 t) \rangle = 0$$

$$\cdot \langle \sin(2\omega_0 t) \rangle = 0$$

$$\cdot \langle \sin^2(\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Il reste: } E_m &= \langle E \rangle = \frac{1}{2} m \left[2a^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} l^2 A^2 \omega_0^2 \right] - mgl + \frac{1}{4} mgl A^2 \\ &= ma^2 \omega_0^2 + \frac{1}{4} l^2 A^2 m \frac{g}{l} - mgl + \frac{1}{4} mgl A^2 \end{aligned}$$

$$E_m = \frac{1}{2} mgl A^2 + ma^2 \omega_0^2 - mgl$$

Bilan d'énergie mécanique moyenne entre t et $t+dt$ (avec $dt \gg T_0$):

$$E_m(t+dt) = E_m(t) + P_m^* dt \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = P_m^*$$

$$\Rightarrow mgl A \cdot \frac{dA}{dt} = mga \omega_0 A^2$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} - \frac{a \omega_0}{l} A = 0$$

Solution: $A(t) = A(0) e^{\frac{t}{\tau_A}}$

avec: $\tau_A = \frac{l}{a \omega_0}$

d'où: $\frac{T_0}{\tau_A} = 2\pi \frac{a}{l}$

12. On utilise deux points de la courbe. Par exemple: $A(16T_0) = A(0) \exp(16 \frac{T_0}{\tau_A}) = 0,05$

$$A(28T_0) = A(0) \exp(28 \frac{T_0}{\tau_A}) = 0,2$$

$$\Rightarrow \frac{e^{28 \frac{T_0}{\tau_A}}}{e^{16 \frac{T_0}{\tau_A}}} = \frac{0,2}{0,05} \Rightarrow e^{12 \frac{T_0}{\tau_A}} = 4 \Rightarrow 12 \frac{T_0}{\tau_A} = \ln 4 \Rightarrow \frac{T_0}{\tau_A} \approx 0,1$$

13. L'hypothèse $T_0 \ll \tau_A$ est juste vérifiée

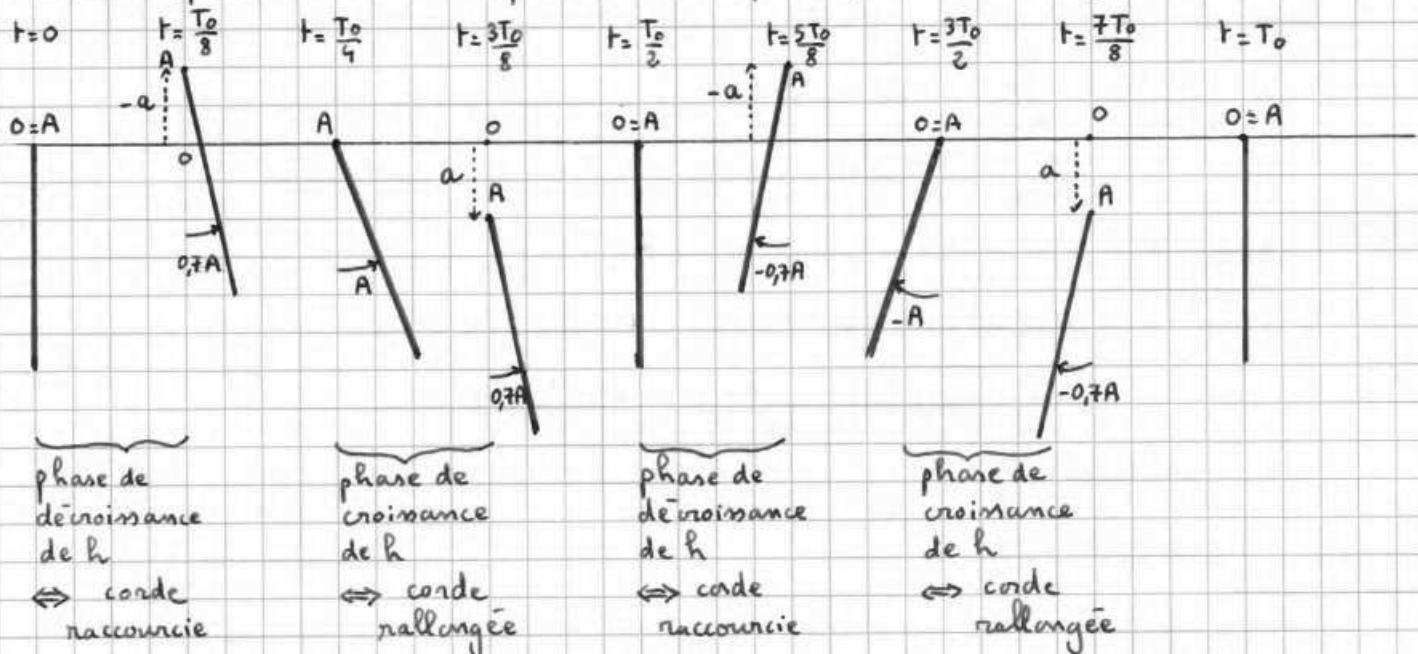
14. L'amplification repose sur la condition $\Omega = 2\omega_0$.

Au voisinage de la résonance, les oscillations ne sont plus de faible amplitude.

La période propre n'est plus égale à T_0 mais supérieure.

La condition $\Omega = 2\omega_0$ n'est plus vérifiée, l'amplification cesse et l'amplitude décroît.

15. On représente l'évolution du pendule sur une période, avec: $h = -a \sin(2\omega_0 t)$ et $\theta = A \sin \omega_0 t$



En résumé: - il faut raccourcir la corde quand le pendule est à la verticale ($\theta=0$)
- il faut rallonger la corde quand le pendule a son élongation maximale ($|\theta|=A$)

II. Stabilisation dynamique: pendule inversé

16. figure de gauche: CI_1 car $\theta(0) = 0,4\pi$. Le pendule oscille autour de $\theta = 0$
figure de droite: CI_2 car $\theta(0) = 0,6\pi$. Le pendule oscille autour de $\theta = \pi$

17. On compte environ 17 petites oscillations dans une période T_0 . Donc: $T_{\text{osc}} = \frac{T_0}{17}$
 A.N: $T_{\text{osc}} = 50 \text{ ms}$

18. A l'équilibre ($\ddot{\theta} = 0$), l'équation (6) devient: $\omega_0^2 (1 + G_0 \sin \Psi) \sin \theta = 0$
 Elle est vérifiée par $\theta = \pi$
 $\theta = \pi$ est donc une position d'équilibre du pendule et on peut envisager des oscillations autour de celle-ci.

19. D'après la question 4, le moment résultant en A des forces est: $\Gamma = -m(g - \ddot{h})l \sin \theta$

Soit: $\Gamma = -ml(g + a\Omega^2 \sin \Psi) \sin(\theta_0 + \epsilon_1 \sin \Psi)$ avec: $\theta = \theta_0 + \theta_1 = \theta_0 + \epsilon_1 \sin \Psi$

$$= -ml(g + a\Omega^2 \sin \Psi) [\sin \theta_0 \cos(\epsilon_1 \sin \Psi) + \sin(\epsilon_1 \sin \Psi) \cos \theta_0]$$

$$\approx -ml(g + G_0 g \sin \Psi) [\sin \theta_0 + \epsilon_1 \sin \Psi \cos \theta_0] \text{ à l'ordre 1 en } \epsilon_1$$

Le moment algébrique moyen est: $\Gamma(\theta_0) = \frac{\Gamma(\Psi = -\frac{\pi}{2}) + \Gamma(\Psi = \frac{\pi}{2})}{2}$

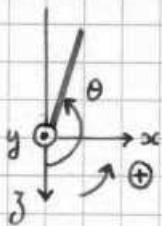
Soit: $\Gamma(\theta_0) = \frac{-mgl(1 - G_0)[\sin \theta_0 - \epsilon_1 \cos \theta_0] - mgl(1 + G_0)[\sin \theta_0 + \epsilon_1 \cos \theta_0]}{2}$

$$= -\frac{mgl}{2} [\cancel{\sin \theta_0} - \cancel{\epsilon_1 \cos \theta_0} - G_0 \cancel{\sin \theta_0} + G_0 \epsilon_1 \cos \theta_0 + \cancel{\sin \theta_0} + \cancel{\epsilon_1 \cos \theta_0} + G_0 \cancel{\sin \theta_0} + \epsilon_1 G_0 \cos \theta_0]$$

$$= -mgl(\sin \theta_0 + \epsilon_1 G_0 \cos \theta_0)$$

or: $g = l\omega_0^2$ donc: $\Gamma(\theta_0) = -\Gamma^*(\sin \theta_0 + \epsilon_1 G_0 \cos \theta_0)$

20.



Pour $\theta_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ le poids tend à faire tourner le pendule dans le sens négatif.
 Pour contrebalancer l'effet du poids, il faut que le moment algébrique moyen soit > 0 :

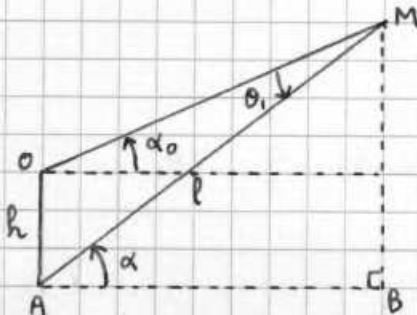
$$\Gamma(\theta_0) > 0 \Rightarrow \sin \theta_0 + \epsilon_1 G_0 \cos \theta_0 < 0$$

21. Pour avoir des oscillations, il faut: $\Gamma(\theta_0) > 0$ sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $\Gamma(\theta_0) < 0$ sur $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

Sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$: $\sin \theta_0 + \epsilon_1 G_0 \cos \theta_0 < 0$ avec $\sin \theta_0 > 0$ et $\cos \theta_0 < 0 \Rightarrow \underline{\epsilon_1 > 0}$

Sur $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$: $\sin \theta_0 + \epsilon_1 G_0 \cos \theta_0 > 0$ avec $\sin \theta_0 < 0$ et $\cos \theta_0 < 0 \Rightarrow \underline{\epsilon_1 < 0}$

22.



On a: $\cos \alpha = \frac{AB}{l}$ et $\cos \alpha_0 = \frac{AB}{OM}$

$$\Rightarrow l \cos \alpha = OM \cos \alpha_0$$

$$l \cos(\alpha_0 + \theta_1) = OM \cos \alpha_0$$

$$\Rightarrow l [\cos \alpha_0 \cos \theta_1 - \sin \alpha_0 \sin \theta_1] = OM \cos \alpha_0$$

$$\Rightarrow l \cos \alpha_0 - \theta_1 l \sin \alpha_0 = OM \cos \alpha_0 \text{ car } |\theta_1| \ll 1$$

On calcule OM: $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} \rightarrow OM^2 = OA^2 + AM^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{AM}$
 $= h^2 + l^2 - 2hl \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$
 $= l^2(1 - 2\frac{h}{l} \sin \alpha + \frac{h^2}{l^2})$
 $\rightarrow OM \approx l(1 - \frac{h}{l} \sin \alpha)$
 $\approx l(1 - \frac{h}{l} \sin \alpha_0)$ au premier ordre en $\frac{h}{l}$

donc: $l \cos \alpha_0 - \theta_1 l \sin \alpha_0 = (l - h \sin \alpha_0) \cos \alpha_0$

$$\theta_1 l \sin \alpha_0 = a \sin \psi \sin \alpha_0 \cos(\theta_0 - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \theta_1 = \frac{a}{l} \sin \psi \sin \theta_0$$

23. (6) $\Rightarrow \ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(1 + G_0 \sin \psi) \sin(\theta_0 + \theta_1) = 0$

$$\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(1 + G_0 \sin \psi) [\sin \theta_0 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_0] = 0$$

$$\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(1 + G_0 \sin \psi) (\sin \theta_0 + \theta_1 \cos \theta_0) = 0 \quad (|\theta_1| \ll 1)$$

$$\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(1 + G_0 \sin \psi) (\sin \theta_0 + \frac{a}{l} \sin \psi \sin \theta_0 \cos \theta_0) = 0$$

$$\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(1 + G_0 \sin \psi) \sin \theta_0 + \omega_0^2(1 + G_0 \sin \psi) \frac{a}{2l} \sin \psi \sin 2\theta_0 = 0$$

on calcule: $\ddot{\theta}_1 = \frac{a}{l} [\ddot{\theta}_0 \cos \theta_0 \sin \psi - \dot{\theta}_0^2 \sin \theta_0 \sin \psi + 2\Omega \dot{\theta}_0 \cos \theta_0 \cos \psi - \Omega^2 \sin \theta_0 \sin \psi]$

On calcule maintenant les moyennes temporelles sur $T_{ex} = \frac{2\pi}{\Omega}$ avec: $\begin{cases} \psi = \Omega t + \phi \\ \theta_0 \text{ figé} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle \sin \psi \rangle = 0 & \text{et } \langle \cos \psi \rangle = 0 \\ \langle \sin^2 \psi \rangle = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \langle \ddot{\theta}_1 \rangle = 0$$

il reste: $\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2 \sin \theta_0 + \omega_0^2 G_0 \frac{a}{4l} \sin 2\theta_0 = 0$

$$\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2 (\sin \theta_0 + Q \sin 2\theta_0) = 0 \quad \text{avec: } Q = \frac{G_0 a}{4l} = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2$$

24. Cette équation ne donne celle de la question 2 pour $Q=0$, i.e $\Omega=0$.

25. (9). $\dot{\theta}_0 \Rightarrow \dot{\theta}_0 \ddot{\theta}_0 + \omega_0^2 (\dot{\theta}_0 \sin \theta_0 + Q \dot{\theta}_0 \sin 2\theta_0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - \omega_0^2 \cos \theta_0 - \omega_0^2 Q \frac{\cos 2\theta_0}{2} = \text{cte}$$

on multiplie par ml^2 pour faire apparaître l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$

donc: $\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - ml^2 \omega_0^2 (\cos \theta_0 + \frac{1}{2} Q \cos 2\theta_0) = \text{cte}$

$\Rightarrow$ énergie potentielle effective: $E_{eff} = -ml^2 \omega_0^2 (\cos \theta_0 + \frac{1}{2} Q \cos 2\theta_0) + \text{cte}$

On veut $E_{eff} = 0$ pour $\theta_0 = 0$ et $Q = 0 \Rightarrow 0 = -ml^2 \omega_0^2 + \text{cte} \Rightarrow \text{cte} = ml^2 \omega_0^2$

donc: $E_{eff} = ml^2 \omega_0^2 [1 - \cos \theta_0 - \frac{Q}{2} \cos 2\theta_0]$

On a donc: $E_{eff}^* = ml^2 \omega_0^2$ et $f(\theta_0) = 1 - \cos \theta_0 - \frac{Q}{2} \cos 2\theta_0$

26. Conservation de l'énergie mécanique:

$$E_c + E_{eff} = \text{cte} = E$$

$$\Rightarrow E_c = E - E_{eff} > 0$$

On trace la droite horizontale associée à l'énergie mécanique constante E .
Les valeurs de θ_0 accessibles sont celles pour lesquelles la courbe $E_{eff}(\theta_0)$ est située sous cette droite.

figure 3 gauche:

$$\begin{aligned} E &= E_c(r=0) + E_{eff}(r=0) \\ &= 0 + E_{eff}(\theta_0 = 0,4\pi) \\ &= E_{eff}^* f(0,4\pi) \end{aligned}$$

Le tracé de $\frac{E}{E_{eff}^*} = f(0,4\pi)$

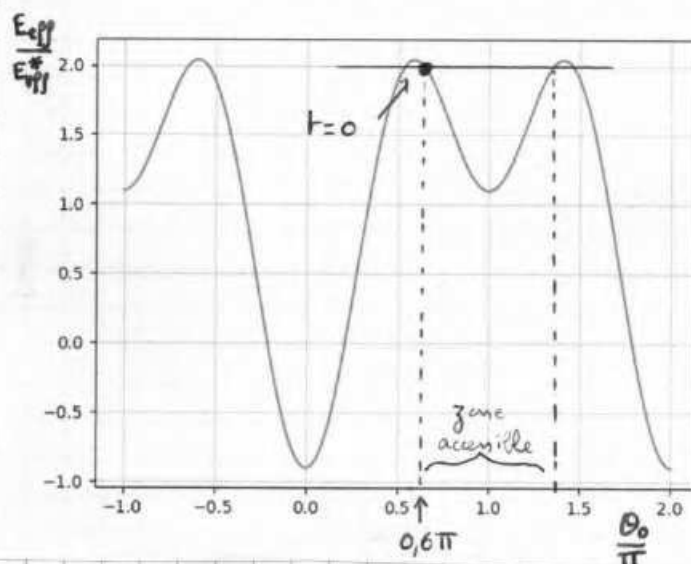
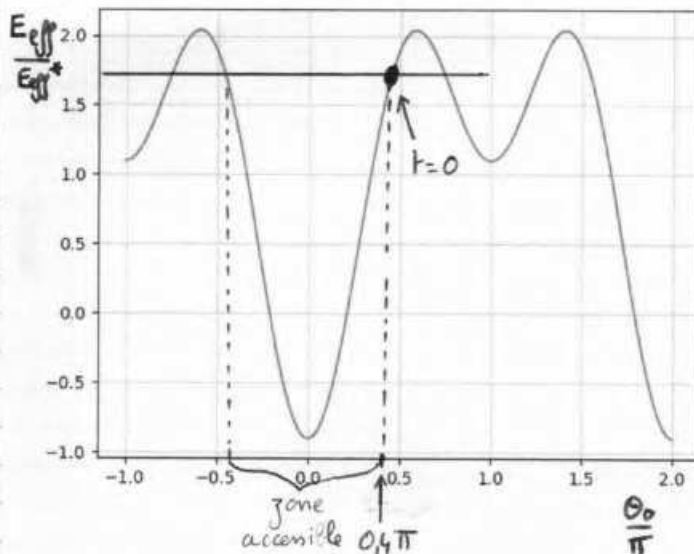
montre que le pendule oscille autour de $\theta_0 = 0$

figure 3 droite:

$$E = E_{eff}^* \cdot f(0,6\pi)$$

Le tracé de $\frac{E}{E_{eff}^*} = f(0,6\pi)$

montre que le pendule oscille autour de $\theta_0 = \pi$



27. L'approximation parabolique d'un puits de potentiel donne:

$$E_{eff}(\theta_0) = E_{eff}(\theta_{oeq}) + \frac{1}{2} (\theta_0 - \theta_{oeq})^2 \left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2} \right)_{\theta_{oeq}}$$

On a l'équivalent d'un ressort de raideur apparente: $k = \left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2} \right)_{\theta_{oeq}}$

D'où une période d'oscillation: $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Le puits autour de $\theta_0 = 0$ est plus "pointu" que le puits autour de $\theta_0 = \pi$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2} \right)_{\theta_0=0} > \left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2} \right)_{\theta_0=\pi} \Rightarrow k(\theta_0=0) > k(\theta_0=\pi) \Rightarrow T_0(\theta_0=0) < T_0(\theta_0=\pi)$$

 28. Pour observer des oscillations autour de $\theta_0 = \pi$, il faut que: $\left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2} \right)_{\theta_0=\pi} > 0$

On calcule: $\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2} = m l^2 \omega_0^2 [\cos \theta_0 + 2Q \cos(2\theta_0)]$

$$\left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2} \right)_{\theta_0=\pi} = m l^2 \omega_0^2 [-1 + 2Q]$$

$$\left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2} \right)_{\theta_0=\pi} > 0 \Rightarrow Q > Q_c = \frac{1}{2}$$

29. On lit sur la courbe: $f(\theta_0=0) = -0,9$
On a par ailleurs: $f(\theta_0=0) = -\frac{Q}{2}$ D'où: $\underline{Q = 1,8}$

La condition $Q > Q_c = 0,5$ est vérifiée.

30. On repart de $\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2(\sin\theta_0 + Q \sin 2\theta_0) = 0$

Autour de $\theta_{eq0} = 0$: $\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2(1 + 2Q)\theta_0 = 0$ en linéarisant

$$\text{d'où: } \boxed{\omega_p^* = \omega_0 \sqrt{1+2Q}}$$

Autour de $\theta_{eq0} = \pi$: on pose $\theta_0 = \pi + v$ $|v| \ll \pi$

$$\ddot{v} + \omega_0^2(\sin(\pi+v) + Q \sin(2\pi+2v)) = 0$$

$$\ddot{v} + \omega_0^2(-1 + 2Q)v = 0$$

$$\text{d'où: } \boxed{\omega_p^* = \omega_0 \sqrt{2Q-1}}$$

Si Q est trop grand, l'hypothèse: $\Omega \gg \omega_p^*$ ou ω_p^* est remise en cause

31. Φ intervient dans $\sin\Psi = \sin(\Omega t + \Phi)$

La démarche consistant à raisonner en moyenne temporelle sur $T_{osc} = \frac{2\pi}{\Omega}$ fait disparaître Φ donc ne permet pas d'étudier son influence.