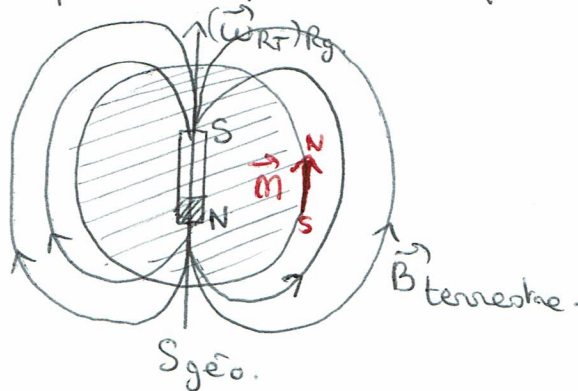


I - Pôles géographiques et magnétique

I-A - Boussole, champ magnétique et dipôle central.

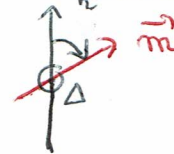
1. Le moment magnétique $\vec{m}$ s'aligne sur la composante horizontale du champ magnétique terrestre (et dans son sens pour la position d'équilibre stable).



Elle indique donc le Nord géographique dans sa position d'équilibre stable.

2. Théorème du moment cinétique appliqué à la boussole et projeté sur Δ (hyp. ϕ glissement) :

$$I \ddot{\alpha} = -m B_{\text{terrestre}} \sin \alpha$$



Pour de petites oscillations : $\ddot{\alpha} + \frac{m B_{\text{terrestre}}}{I} \alpha(t) = 0$

On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique de période $T_{\text{osc}} = 2\pi \times \sqrt{\frac{I}{m B_{\text{terrestre}}}}$

les frottements étant faibles, on peut confondre période propre et pseudopériode des oscillations amorties.

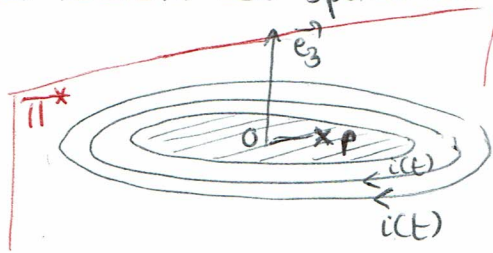
d'où $B_{\text{terrestre}} = \frac{4\pi^2 I}{m T_{\text{osc}}^2}$ composante horizontale du champ magnétique terrestre.

$$\begin{aligned} 3. \vec{B}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M}_0 R \sin \lambda) - R_T^2 \vec{M}}{R_T^5} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3 M_0 \sin \lambda}{R_T^3} \vec{e}_r - \frac{1}{R_T^3} (M_0 \sin \lambda \vec{e}_r - M_0 \cos \lambda \vec{e}_\theta) \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{2 M_0 \sin \lambda}{R_T^3} \vec{e}_r - \frac{M_0 \cos \lambda}{R_T^3} \vec{e}_\theta \right) \end{aligned}$$

I.B. Modèle autodynamique et glissements du champ.

(3)

6. Du fait du grand nombre N de spires, on néglige le champ magnétique créé par les autres portions de conducteurs (2 fils reliant les spires au disque et le disque lui-même).



π^* est un plan d'antécédents des courants.

$$P \in \pi^* \text{ donc } \vec{B}(P) \in \pi^*$$

En coordonnées cylindriques: $\vec{B}(P) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z$
De plus la distribution de courant est invariante par rotation autour de O_z donc $\vec{B}(P) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z$

$$\bullet \quad M_a = \frac{1}{i(t)} \int_0^a r B_z(r, 0) dr \quad \text{et} \quad M_b = \frac{1}{i(t)} \int_0^b r B_z(r, 0) dr$$

Homogène à un
flux de
champ magnétique
 $\Rightarrow M_a$ (et M_b) est
homogène à une
inductance.

Si $i(t)$ positif alors $B_z(r, 0) < 0$ donc M_a et $M_b < 0$.
et $|M_b| < |M_a|$

- Inductance propre du circuit électrique:

$$\Phi_{\text{propre}} = L \times i(t) = \int_0^a 2\pi r \times dr \times B_z(r, 0) \\ = 2\pi M_a \times i(t)$$

$$\text{d'où } \underline{L = 2\pi M_a}$$

7. $d\vec{F}_L = i(t) d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = +i(t) \times d\ell B_z(r, 0) \vec{e}_\theta$ avec $B_z(r, 0) < 0$

- moment élémentaire des forces de Laplace s'exerçant sur ce tronçon:

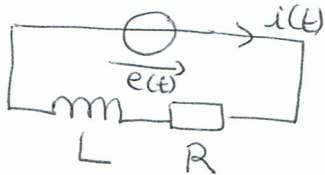
$$d\vec{\omega}_L = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_L = +i(t) d\ell B_z(r, 0) \times r \vec{e}_z$$

moment résultant = $\vec{\sigma}_{FL} = \int_0^b +i(t) dz B_3(r,0) \times r \vec{e}_3$ (4)

$$\boxed{\vec{\sigma}_{FL} = +i(t)^2 \times M_b \vec{e}_3}$$

8) Conversion électromécanique parfaite : $P_{FL} + P_{elec} = 0$.
 Soit $\vec{\sigma}_{FL} \cdot \vec{\omega} + e(t) \times i(t) = 0$. $< 0 \Rightarrow P_{elec} > 0$.
 ou $i^2(t) \times M_b \times \omega + e(t) i(t) = 0$ (modération P_{elec} freinage par induction)
 $\Rightarrow \boxed{e(t) = - M_b \omega i(t)}$

9) Modélisation électrique : $e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri(t)$ (1)



• Théorème du moment cinétique appliqué au disque ($/O_3$)

$$I \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 + M_b i^2(t) \quad (2)$$

d'où $\frac{di}{dt} = + \frac{M_b \omega i(t)}{L} - \frac{R i(t)}{L} = i(t) \left(\underbrace{-\frac{M_b \omega(t)}{L}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{R}{L}}_{\beta} \right)$

et $\frac{d\omega}{dt} = \underbrace{\frac{\Gamma_0}{I}}_{\gamma} + \underbrace{\frac{M_b}{I}}_{-\delta} i^2(t)$
 (!) $M_b < 0$.
 On a donc bien α, β et γ tous positifs.

10) $H(\omega, i) = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} L i^2 - \frac{L \Gamma_0}{M_b} \ln \left| \frac{i}{i_0} \right| - \frac{IR}{M_b} \omega$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} I \times 2\omega \frac{d\omega}{dt} + L i \frac{di}{dt} - \frac{L \Gamma_0}{M_b} \frac{i}{i_0} \times \frac{di}{i_0 dt} - \frac{IR}{M_b} \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dH}{dt} = I \omega \left(\frac{\Gamma_0}{I} + \frac{M_b}{I} i^2(t) \right) + L i^2 \left(\frac{M_b \omega(t)}{L} - \frac{R}{L} \right) - \frac{L \Gamma_0}{M_b} \left(\frac{M_b \omega(t)}{L} - \frac{R}{L} \right) - \frac{IR}{M_b} \left(\frac{\Gamma_0}{I} + \frac{M_b}{I} i^2(t) \right)$$

$$\frac{dH}{dt} = M_b \omega i^2(t) + M_b i^2 \omega(t) - R i^2(t) - R i^2(t)$$

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = 2(M_b \omega - R) i^2(t)}$$

- H représente sans doute l'énergie du système.

On reconnaît dans le terme $\frac{1}{2} I \omega^2$ l'énergie cinétique de rotation et dans $\frac{1}{2} L i^2$ l'énergie magnétique.

Pour $\omega = \frac{R}{M_b}$ on a $\frac{dH}{dt} = 0$ donc $H = \text{cte}$: régime stationnaire

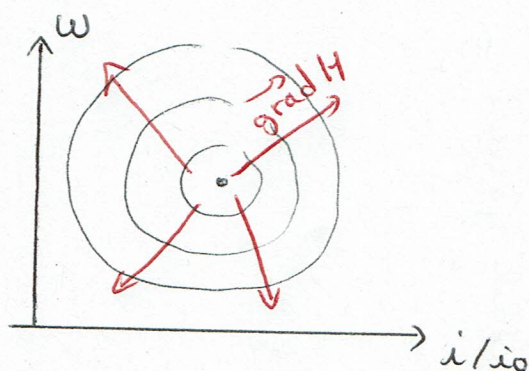
$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} H &= \left(\frac{\partial H}{\partial i} \right)_\omega \vec{u}_i + \left(\frac{\partial H}{\partial \omega} \right)_i \vec{u}_\omega \\ &= \left(L i - \frac{L \Gamma_0}{M_b i} \right) \vec{u}_i + \left(I \omega - \frac{I R}{M_b} \right) \vec{u}_\omega \end{aligned}$$

le gradient de H s'annule donc pour $i = \pm \sqrt{\frac{\Gamma_0}{M_b}}$ et $\omega = \frac{R}{M_b}$

On retrouve $\omega = \frac{R}{M_b}$ donc $H = \text{cte}$ au cours du temps.
régime stationnaire

Les 2 points du plan (i, ω) pour lesquels $\vec{\text{grad}} H = \vec{0}$ correspondent aux couples (i, ω) pour lesquels $H(i, \omega)$ est extrême.

11)



Sur le portrait de phase représenté, H est maximal au centre donc l'énergie a sa valeur maximale.

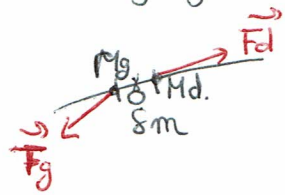
Conclusion ?

II - La glace de la banquise

6

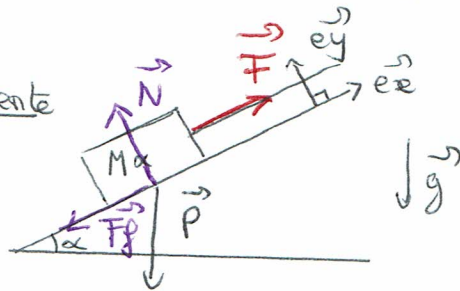
II-A. Un traîneau sur la glace

- 12) PFD appliqué à un élément de corde : $\sum \vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_d$
en négligeant le poids devant les tensions.



- A l'équilibre : $\|\vec{F}_g\| = \|\vec{F}_d\|$
- Si les forces n'étaient pas colinéaires à la corde, elles engendreraient un moment de force et donc un changement de direction de la corde.

13) Avec pente



PFD appliqué à la masse M :
 $M\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_g$

Projection / Ox : $M\ddot{x} = \|\vec{F}\| - \|\vec{F}_g\| - Mg_0 \sin \alpha$

Projection / Oy : $0 = \|\vec{N}\| - Mg_0 \cos \alpha$

avec en mouvement : $\|\vec{F}_g\| = \mu_d \|\vec{N}\| = \mu_d Mg_0 \cos \alpha$

Sans pente : $m\ddot{x} = \|\vec{F}\| - \|\vec{F}_g\|$

$0 = \|\vec{N}\| - Mg_0$

avec en mouvement : $\|\vec{F}_g\| = \mu_d \|\vec{N}\| = \mu_d Mg_0$

On peut alors poser : $\mu_d' = \mu_d \cos \alpha < \mu_d$

14) $\alpha = 0$:

Tant que le traîneau est à l'arrêt : $\|\vec{F}_g\| < \mu_s \|\vec{N}\|$
soit $\|\vec{F}_g\| < \mu_s Mg_0$

et $\ddot{x} = 0 = \|\vec{F}\| - \|\vec{F}_g\|$

donc $\|\vec{F}\| = \|\vec{F}_g\| < \mu_s Mg_0$

soit $F_0 - \beta v < \mu_s Mg_0$ donc $F_0 < \mu_s Mg_0 + \beta v$

et $F_{\min} = \mu_s Mg_0 = 8 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^2 \times 9,8 \simeq 400 \text{ N}$.

(7)

15) En régime stationnaire : $v = v_0$.

$$M \frac{dv}{dt} = F_0 - \beta v - \mu_d M g_0$$

$$\text{soit } \frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{M} v(t) = \frac{F_0}{M} - \mu_d g_0$$

$$\text{donc en régime stationnaire : } \frac{\beta}{M} v_0 = \frac{F_0}{M} - \mu_d g_0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{M} v(t) = \frac{\beta}{M} v_0$$

$$\text{et } v(t) = v_0 + A e^{-\frac{\beta t}{M}}$$

$$F_0 = \beta v_0 + \mu_d M g_0$$

$$\text{Si } v(0) = 0 = v_0 + A \text{ alors } v(t) = v_0 (1 - e^{-\frac{\beta t}{M}})$$

$$\text{A } t = t_1 : v(t_1) = \frac{95}{100} v_0 = v_0 (1 - e^{-\frac{\beta}{M} t_1})$$

$$\text{donc } e^{-\frac{\beta}{M} t_1} = \frac{5}{100}$$

$$\text{soit } t_1 = \frac{M}{\beta} \ln \frac{100}{5} = \frac{M}{\beta} \ln 20$$

$$\text{ou } \beta = \frac{M}{t_1} \ln 20 = \frac{8 \cdot 10^2}{8} \times 3 = 300 \text{ kg s}^{-1}$$

$$\text{et } F_0 = 3 \cdot 10^2 \times 3 + 5 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^2 \times 9,8$$

$$\approx 9 \cdot 10^2 + 250$$

$$F_0 \approx 1150 \text{ N}$$

16) PFD appliqué au traineau et projeté dans la base polaire : cylindrique

$$\text{sur } \vec{u}_r : -\frac{M v_0^2}{R} = -\|\vec{T}\| \sin \theta$$

$$\text{sur } \vec{u}_\theta : 0 = \|\vec{T}\| \cos \theta - \|\vec{F}_g\|$$

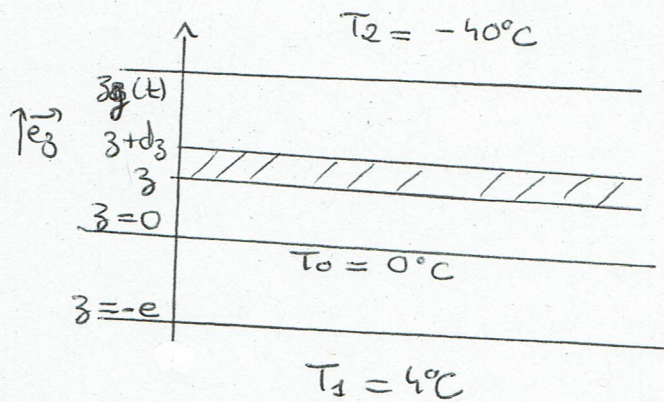
$$\text{sur } \vec{u}_z : 0 = M g_0 - \|\vec{N}\|$$

$$\text{donc avec } \|\vec{F}_g\| = \mu_d \|\vec{N}\| = \mu_d m g_0 : -\frac{M v_0^2}{R} = -\mu_d M g_0 \tan \theta$$

$$\text{et } \|\vec{T}\|^2 = \frac{M^2 v_0^4}{R^2} + \mu_d^2 M^2 g_0^2 \quad \text{et } \tan \theta = \frac{v_0^2}{\mu_d R g_0}$$

II - B - Croissance hivernale de l'épaisseur de glace

(8)



17) Système = tranche de cylindre d'épaisseur dz et de section S
1er principe : $dU = \delta Q$

avec $dU = S \times dz \times \rho_g \times c_g \times \left(\frac{\partial T_g}{\partial t} \right)_z dt$

et $\delta Q = j_q(z) \times S dt - j_q(z+dz) \times S dt$
 $= - \left(\frac{\partial j_q}{\partial z} \right)_t S dz dt$

avec $\vec{j}_q = -\lambda_g \text{grad } T_g = -\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial z} \vec{e}_z$

On obtient : $S dz \rho_g c_g \left(\frac{\partial T_g}{\partial t} \right)_z dt = \lambda_g \left(\frac{\partial^2 T_g}{\partial z^2} \right)_t S dz dt$

soit $\left(\frac{\partial T_g}{\partial t} \right)_z - \frac{\lambda_g}{\rho_g c_g} \left(\frac{\partial^2 T_g}{\partial z^2} \right)_t = 0$

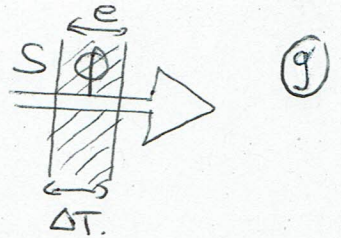
18) Ordre de grandeur de la durée de diffusion thermique :
 $\frac{\lambda_g}{\rho_g c_g}$ homogène à $\frac{L^2}{T}$

Poseons $\frac{\lambda_g}{\rho_g c_g} = \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t}$; On obtient $\Delta t = \frac{(\Delta z)^2 \rho_g c_g}{\lambda_g}$

La température ne dépend pratiquement plus du temps pour $t \gg \Delta t$.

Variations temporelles "assez lentes" signifie que l'on néglige $\left(\frac{\partial T_g}{\partial t} \right)_z$ devant $\frac{\lambda_g}{\rho_g c_g} \left(\frac{\partial^2 T_g}{\partial z^2} \right)_t$.

19) Résistance thermique: $R = \frac{\Delta T}{\Phi}$



On peut montrer en régime stationnaire que $R = \frac{e}{\lambda S}$.

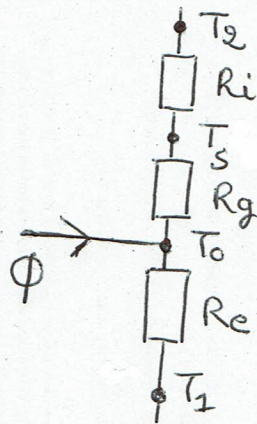
Donc $R_g = \frac{3g}{\lambda_g S}$ et $R_e = \frac{e}{\lambda_e S}$

20) En surface: $R_i = \frac{1}{h_i S}$

21) La solidification de la glace libère de la chaleur en $z=0$

On a alors $\Phi = \underbrace{\ell_f \times \rho_g \times S \times \frac{dz_g}{dt}}_{\text{masse de glace formée par unité de temps.}}$

- Ce flux d'énergie thermique se répartit dans les parties glacée et liquide.
- Les résistances R_g et R_i sont traversées par le même flux donc elles sont en série.



22) Loi des nœuds en terme de potentiel:

$$T_0 = \frac{\Phi + \frac{T_1}{R_e} + \frac{T_2}{R_i + R_g}}{\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_i + R_g}}$$

$$T_0 \left(\underbrace{\frac{\lambda_e S}{e}}_{\text{négligé}} + \frac{\lambda_g h S}{\lambda_g + 3g(t)h} \right) = \ell_f \rho_g S \frac{dz_g}{dt} + \underbrace{T_1 \frac{\lambda_e S}{e}}_{\text{idem.}} + T_2 \left(\frac{\lambda_g h S}{\lambda_g + 3g(t)h} \right)$$

le texte précise $\frac{e}{\lambda_e} \gg \frac{3g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}$ soit $R_e \gg R_g$
donc $\frac{1}{R_e} \ll \frac{1}{R_g}$.

On obtient : $T_0 \lambda_g R = \ell_f \rho_g (\lambda_g + z_g(t) R) \frac{dz_g}{dt} + T_2 \lambda_g R$ (10)

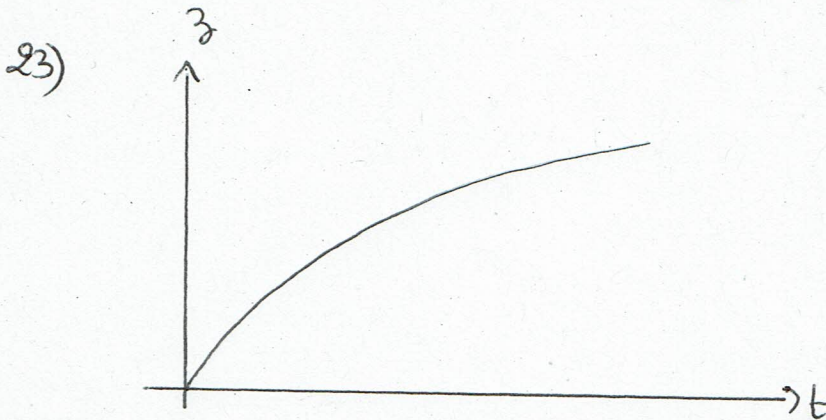
d'où $(T_0 - T_2) \lambda_g R = \ell_f \rho_g \left[\lambda_g z_g(t) + \frac{R}{2} z_g(t)^2 \right]$

ou $(T_0 - T_2) \lambda_g R = \ell_f \rho_g \frac{R}{2} \left[\frac{\lambda_g \cdot 2}{R} z_g(t) + z_g(t)^2 \right]$

soit $(T_0 - T_2) \frac{\lambda_g^2 \times 4}{R^2} = \ell_f \rho_g \times \frac{\lambda_g \times 4}{R^2} \left[\ell_g z_g(t) + z_g(t)^2 \right]$

$\parallel$
 ρ_g^2

$\parallel$
 $\rho_g = \frac{\ell_f \rho_g \lambda_g \times 2}{R^2}$



- Au début de la croissance de l'épaisseur de glace : $\ell_g z_g(t) \gg z_g^2(t)$
donc $\ell_g \rho_g z_g(t) = \rho_g^2 \times t$ soit $v_g = \frac{dz_g}{dt} = \text{cte.}$

$\Rightarrow$ l'épaisseur de glace croît de façon régulière.

- Lorsque $\rho_g z_g(t) \ll z_g^2(t)$

alors $\rho_g z_g^2(t) = \rho_g^2 t$ soit $z_g(t) = A \sqrt{t}$

l'épaisseur de glace croît de plus en plus lentement