

L'indice et le froid

Mohamed Afekir (cpgeafek@gmail.com)
École Royale de l'Air
CPGE - Marrakech

I.- Vérification de la loi de Gladstone-Dale

□ 1-

- $(n - 1)$ est proportionnel à la masse volumique ρ :

$$n - 1 \propto \rho$$

l'approximation: l'air est considéré comme un parfait;

$$pV = n_{air}RT = \frac{m_{air}}{M_{air}}RT \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M_{air}} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{M_{air}}{R} \frac{p}{T}$$

soit;

$$n - 1 \propto \frac{p}{T}$$

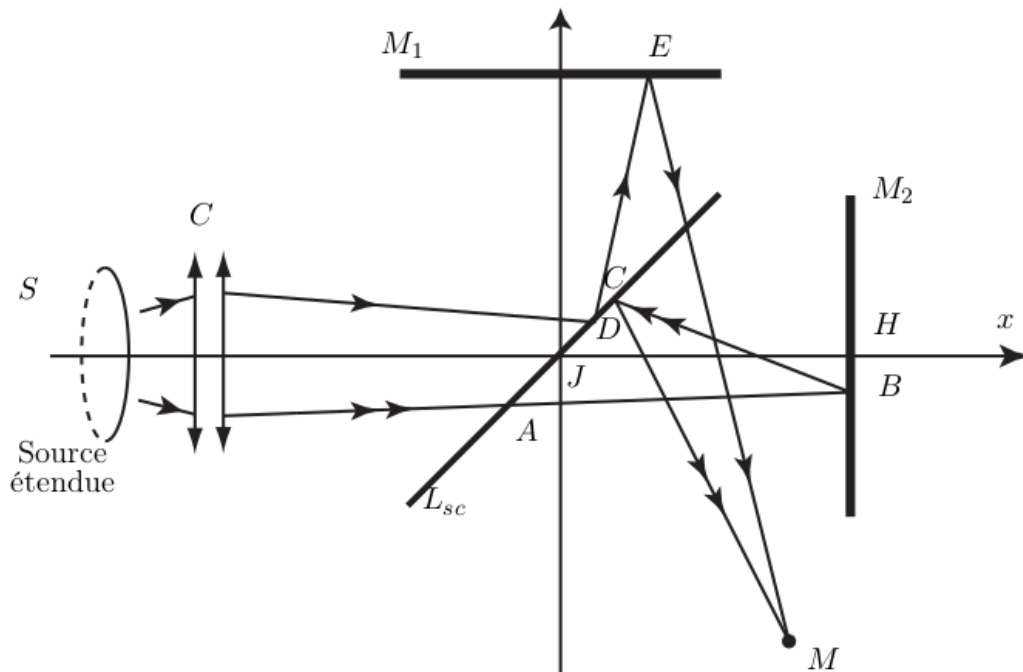
- à température constante:

$$n - 1 \propto p \Rightarrow \frac{n - 1}{p} = \frac{n_o - 1}{p_o} \quad \text{ou} \quad n - n_o = \frac{1 - n_o}{p_o} (p - p_o)$$

soit;

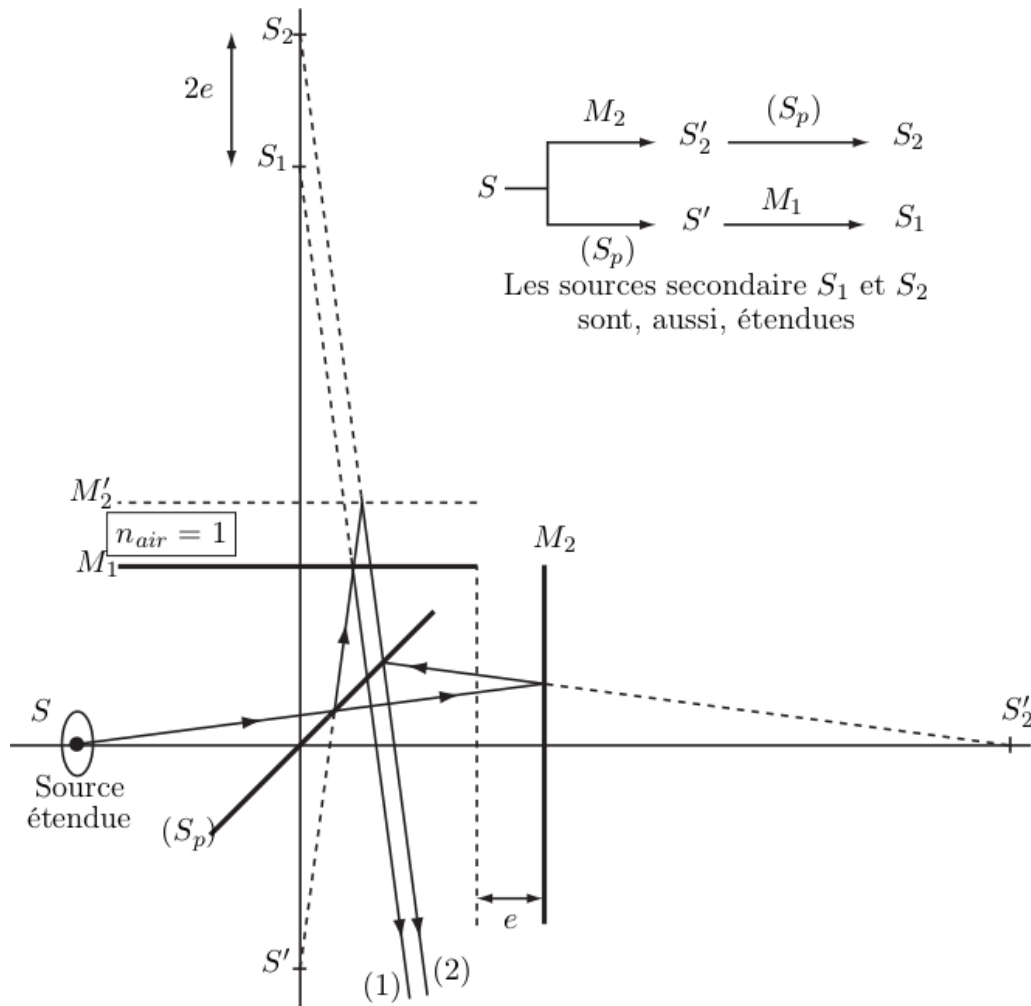
$$n - 1 \propto (p - p_o)$$

□ 2- Schéma symbolique de l'interféromètre de Michelson:



Les plans des miroirs M_1 et M_2 sont perpendiculaire et que l'image M'_2 de M_2 par la séparatrice L_{sp} est un plan parallèle à M_1 distants d'une épaisseur e . Le **condenseur** (lentille convergente de focale quelques mm) permet d'éclairer le dispositif sous incidence quasi-normale.

Modèle complet de l'interféromètre de Michelson en lame d'air:

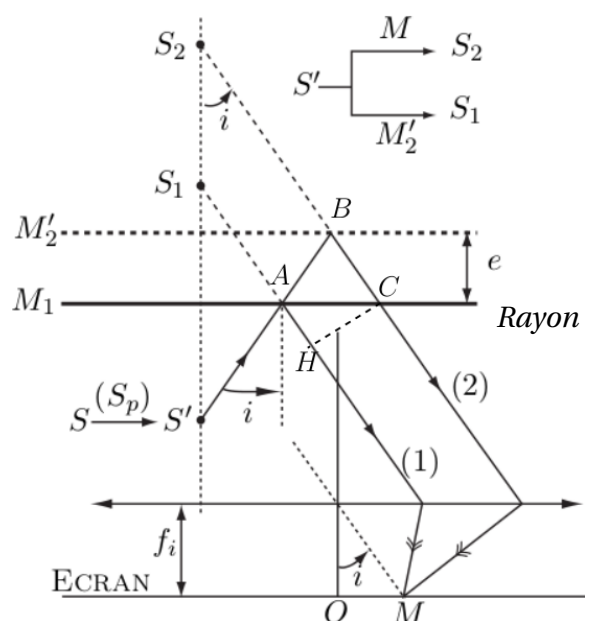


- Les rayons (1) et (2) interfèrent à "l'infini"; la *lentille convergente*, de foyer $f_i = f'$, permet de ramener l'observation de l'infini à sur un écran placé dans son plan focal.
- *Différence de marche:*

$$\delta = (2) - (1) = (ABC) - (AH) = 2AB - AH$$

avec $AB = \frac{e}{\cos(i)}$ et $AC = 2e \tan(i)$

$$\delta = \frac{2e}{\cos(i)} - \frac{2e \sin^2(i)}{\cos(i)} = \boxed{2e \cos(i)}$$



r_k du $k^{\text{ème}}$ anneau brillant:

$$\begin{aligned}\delta(M) &= k\lambda \quad (\text{centre brillant}) \\ &= 2e\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad i \sim \tan(i) = \frac{r_k}{f'} \\ &= 2e\left(1 - \frac{r_k^2}{2f'^2}\right) \Rightarrow \boxed{r_k = f' \sqrt{2\left(1 - \frac{k\lambda}{\delta_o}\right)}} \quad ; \quad (\delta_o = 2e)\end{aligned}$$

□ 3-

- la différence de marche supplémentaire:

$$\begin{aligned}\boxed{\delta_{\text{supp}} = 2(n - n_o)L} \quad \text{et} \quad \delta_{\text{supp}} &= 2(n - n_o)L = N\lambda \\ &= 2a(p - p_o)L \\ \Rightarrow \quad \boxed{N = \frac{2La}{\lambda}(p - p_o)}\end{aligned}$$

□ 4- $T_o = 300 \text{ K}$ et $\lambda = 536 \text{ nm}$

$p - p_o$	0	0,5	0,7	1	1,3	1,5	1,8	2	2,3	2,5
N	0	17	26	40	56	68	82	92	102	111
$\frac{2La}{\lambda} = \frac{N}{p - p_o}$	-	34	37,1	40	43,1	45,3	45,6	46,0	44,3	44,4

$$a = \frac{\lambda}{2L} \left(\frac{N}{p - p_o} \right)_{\text{moy}} \approx 8,5 \times 10^{-2} \text{ K.bar}^{-1}$$

Si on dispose d'un outil d'analyse numérique, on pourra représenter, par exemple, la courbe $N = f(p - p_o)$ de façon minutieuse et donc l'exploiter pour déterminer a via sa pente, avec le maximum de précision!

□ 5- La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron dans le référentiel barycentrique:

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m_e \omega_o^2 \vec{r} - m_e \Gamma \vec{v} - e \vec{E}$$

ou;

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_o^2 \vec{r} = \frac{-e}{m_e} \vec{E}$$

- le modèle de l'électron élastiquement lié est dans le cadre non relativiste (*modèle classique*) $v \ll c$

$$\text{pour une onde plane; } \|\vec{E}\| = \|\vec{B}\|c \Rightarrow \underbrace{ev\|\vec{B}\|}_{\|\vec{f}_{\text{mag}}\|} \ll \underbrace{e\|\vec{E}\|}_{\|\vec{f}_{\text{elec}}\|}$$

La contribution électrique l'emporte, alors, sur la contribution magnétique de l'onde sur l'électron.

- on pose $\vec{v} = \vec{v}_o e^{i\omega t}$; puis on remplace dans l'équation:

$$i\omega \vec{v} + \Gamma \vec{v} + \omega_o^2 \frac{\vec{v}}{i\omega} = -\frac{e}{m_e} \vec{E} \Rightarrow \vec{v} = \frac{-\frac{e}{m_e} \vec{E}}{\Gamma + i\omega \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right)}$$

□ **6-** $m_{\text{noy}} \gg m_e$; donc, le barycentre du système coïncide avec le noyau. Le vecteur densité de courant total:

$$\underbrace{\vec{j} = -2 \times n^* e \vec{v}}_{\text{du fait qu'on}} = \frac{2n^* e^2}{m_e} \vec{E} \frac{1}{\Gamma + i\omega \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right)} = \frac{2n^* e^2}{m_e} \vec{E} \frac{i\omega}{i\Gamma\omega - \omega^2 + \omega_o^2} = \gamma \vec{E}$$

deux électrons actifs

$$\gamma = \frac{\kappa n^* e^2}{m_e} \frac{i\omega}{i\Gamma\omega - \omega^2 + \omega_o^2} \quad ; \quad (\kappa = 2)$$

□ **7-**

- γ correspond au filtre *passé-bande*. On écrivant γ sous la forme:

$$\gamma = \frac{2n^* e^2}{m_e} \frac{1}{\Gamma + i\omega \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right)} \Rightarrow |\gamma| = \frac{2n^* e^2}{m_e} \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 + \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right)^2}}$$

on constate que $|\gamma|$ est maximal pour $\omega = \omega_o$. Soit le maximum $\gamma_o = \frac{2n^* e^2}{m_e \Gamma}$.

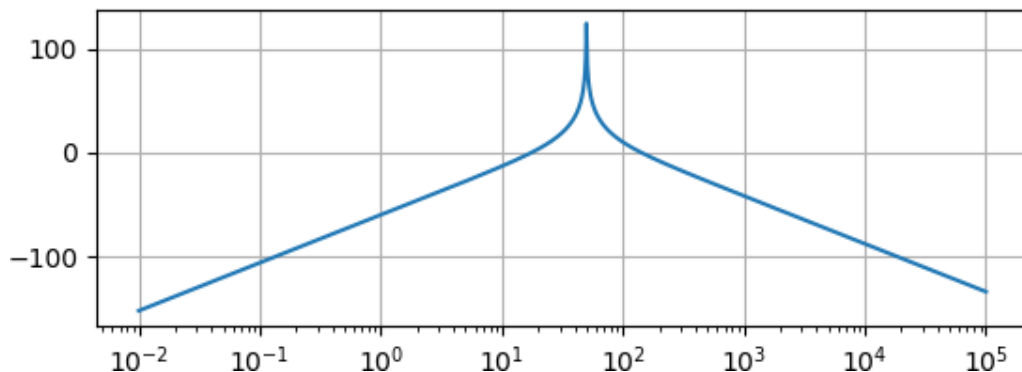
- la fonction de transfert:

$$H(\omega) = \frac{\gamma}{\gamma_o} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\Gamma} \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right)} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega_o}{\Gamma} \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}$$

- la forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre *passé-bande* est:

$$H(\omega) = \frac{H_o}{1 + iQ \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)} \Rightarrow Q = \frac{\omega_o}{\Gamma}$$

- Diagramme de Bode:



□ 8-

- Équations de Maxwell

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_o \gamma \vec{E} - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

- Équations de propagation

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}}{\partial t} \\ &= -\mu_o \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ &= (-i\mu_o \gamma \omega + \mu_o \epsilon_o \omega^2) \vec{E} \\ \Delta \vec{E} &= \left[\frac{-i\mu_o \gamma \omega + \mu_o \epsilon_o \omega^2}{\omega^2} \right] \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_o \epsilon_o \underbrace{\left[1 - \frac{i\gamma}{\epsilon_o \omega} \right]}_{\epsilon_r} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_o \epsilon_o \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \epsilon_r &= 1 - \frac{i\gamma}{\epsilon_o \omega}\end{aligned}$$

□ 9-

- permittivité relative

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= 1 - \frac{i\gamma}{\epsilon_o \omega} \\ &= 1 + \frac{\kappa n^* e^2}{m_e \epsilon_o} \left[\frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega \Gamma} \right] \\ &= 1 + \frac{\kappa n^* e^2}{m_e \epsilon_o} \left(\frac{1}{\omega_o^2} \right) = 1 + \frac{\kappa n^* e^2}{m_e \epsilon_o \omega_o^2} \quad ; \quad (\omega \ll \omega_o \quad \text{et} \quad \Gamma = 0)\end{aligned}$$

- indice de réfraction n : l'onde est plane; on considère la structure du champ électrique associé sous la forme $\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$. En remplaçant dans l'équation de propagation (voir question □ 8-), on obtient la relation de dispersion:

$$k^2 = \omega^2 \mu_o \epsilon_o \epsilon_r \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{v} \quad \text{et} \quad v = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{\epsilon_r}$$

- n en fonction de n^* :

$$n^2 = \epsilon_r = 1 + \frac{\kappa n^* e^2}{m_e \epsilon_o \omega_o^2} \quad \text{tel que} \quad n^2 - 1 = \frac{\kappa n^* e^2}{m_e \epsilon_o \omega_o^2} \ll 1$$

soit;

$$n = \left(1 + \frac{\kappa n^* e^2}{m_e \epsilon_o \omega_o^2} \right)^{1/2} \simeq 1 + \frac{\kappa n^* e^2}{2 m_e \epsilon_o \omega_o^2}$$

□ 10–

- la densité n^* en fonction de la température et la pression de l'air

$$n^* = \frac{N}{V} \quad \text{avec} \quad N = \mathcal{N}_A n_{air} \quad \text{et} \quad pV = n_{air} RT$$

d'où:

$$pV = RT \frac{N}{\mathcal{N}_A} \Rightarrow p = \frac{RT}{\mathcal{N}_A} n^* \quad \text{ou} \quad n^* = \frac{\mathcal{N}_A p}{R T} = \frac{p}{k_B T}$$

- l'indice n en fonction de la température et la pression de l'air

$$n = 1 + \frac{\kappa n^* e^2}{2m_e \epsilon_0 \omega_o^2} = 1 + \frac{e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_o^2} \frac{\mathcal{N}_A p}{R T}$$

- le coefficient a

$$n = 1 + \frac{e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_o^2} \frac{\mathcal{N}_A p}{R T} \quad \text{et} \quad n_o = 1 + \frac{e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_o^2} \frac{\mathcal{N}_A p_o}{R T_o}$$

à $T = T_o$:

$$n - n_o = \frac{e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_o^2} \frac{\mathcal{N}_A p - p_o}{R T_o} = a \frac{p - p_o}{T_o} \Rightarrow a = \frac{e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_o^2 k_B}$$

- Application numérique

$$\omega_o = \sqrt{\frac{e^2}{m_e \epsilon_0 a k_B}} = 1,6 \times 10^{16} \text{ Hz}$$

Cette fréquence est en dehors du domaine du visible: domaine de l' UV. L'approximation $n^2 - 1 \ll 1$ est valable pour une fréquence $\Omega = \sqrt{\frac{2n^* e^2}{m_e \epsilon_0}} \ll \omega_o$. Elle est, donc, valable dans le domaine du visible.

II.– Refroidissement par désaimantation adiabatique

□ 11– La condition d'équilibre est : $\vec{\mu} \wedge \vec{B} = \vec{0}$. La situation d'équilibre est telle que $\vec{\mu}$ et $\vec{B}$ sont soit **parallèles** (*colinéaires et de même sens*), soit **antiparallèles** (*colinéaires et de sens opposé*). La situation stable est lorsqu'ils sont **parallèles**; en effet l'énergie potentielle d'interaction:

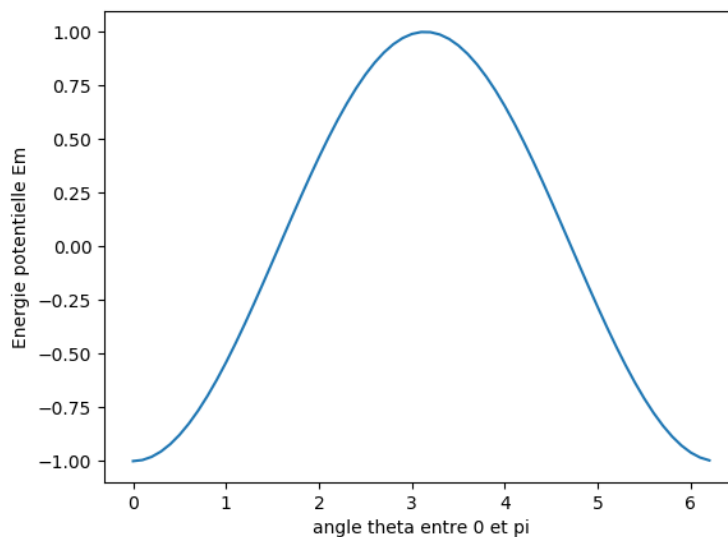
$$E_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta \quad \text{avec} \quad \theta \quad \text{l'angle entre } \vec{\mu} \quad \text{et} \quad \vec{B}$$

$$\text{à l'équilibre} \quad \left(\frac{dE_m}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_e} = 0 \quad \text{pour} \quad \theta_e = 0 \quad (\text{parallèles}) \quad \text{ou} \quad \theta_e = \pi \quad (\text{antiparallèles})$$

Stabilité:

$$\underbrace{\left(\frac{d^2 E_m}{d\theta^2} \right)_{\theta=0}}_{E_m \text{ est minimale}} > 0: \quad \text{situation stable} \quad \text{et} \quad \underbrace{\left(\frac{d^2 E_m}{d\theta^2} \right)_{\theta=\pi}}_{E_m \text{ est maximale}} < 0: \quad \text{situation instable}$$

Graphes $E_m = f(\theta)$: pour $0 \leq \theta \leq \pi$



□ 12–

- moment cinétique

$$|\vec{L}| = m_e |\vec{r}| |\vec{v}| = m_e r v$$

- l'intensité du courant

$$I = -\frac{e}{\tau} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2\pi r}{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = -\frac{ev}{2\pi r}}$$

- moment magnétique

$$\vec{\mu} = IS\hat{u} = I\pi r^2 \hat{u} = -\frac{evr}{2} \hat{u} = -\frac{evr}{2} \hat{u}$$

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2} \frac{|\vec{L}|}{m_e} \hat{u} = -\frac{e}{2} \frac{\vec{L}}{m_e} \quad ; \quad (\text{les deux moments sont, alors, colinéaires})$$

$$\mu = |\vec{\mu}| = \frac{e|\vec{L}|}{2m_e} = \frac{ep\hbar}{2m_e} = p\mu_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}}$$

Application numérique:

$$\mu_B = 9,7 \times 10^{-24} \text{ A.m}^2$$

□ 13– la proportion P_k d'ions dans l'état $E_k = -kg\mu_B B$:

$$P_k = Ae^{-\beta E_k} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

condition de normalisation:

$$\sum_k P_k = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{A} = Z = \sum_k e^{-\beta E_k} \quad \text{ou} \quad P_k = \frac{e^{-\beta E_k}}{Z} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\beta E_k}{k_B T}\right)$$

$$P_k = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{kg\mu_B B}{k_B T}\right) = \frac{1}{Z} \exp(kx) \quad ; \quad \boxed{x = \frac{g\mu_B B}{k_B T}}$$

□ 14-

$$Z = \sum_k \exp(-\beta E_k) = \sum_k \exp\left(\frac{kg\mu_B B}{k_B T}\right) = \sum_k \exp(kx)$$

$$Z = \sum_{-m}^m \exp(kx) = e^{-mx} + e^{(-m+1)x} + \dots + e^{(m-1)x} + e^{mx}$$

$$= e^{-mx} \times \underbrace{\left(1 + e^x + \dots + e^{(2m-1)x} + e^{2mx}\right)}_{\substack{\text{somme des termes d'une suite géométrique} \\ \text{de raison } e^x}}$$

$$= e^{-mx} \times \frac{1 - e^{(2m+1)x}}{1 - e^x}$$

$$Z = \frac{\sinh((m+1/2)x)}{\sinh(x/2)}$$

□ 15- $\mu_z = kg\mu_B$

$$\begin{aligned} \langle \mu_z \rangle &= \sum_{-m}^m \mu_z P_k \\ &= \sum_{-m}^m \frac{kg\mu_B}{Z} \exp(kx) = \frac{g\mu_B}{Z} \sum_{-m}^m \frac{d}{dx} \exp(kx) \\ &= \frac{g\mu_B}{Z} \frac{d}{dx} \sum_{-m}^m \exp(kx) = \frac{g\mu_B}{Z} \frac{dZ}{dx} \\ &= g\mu_B \frac{d \ln(Z)}{dx} \end{aligned}$$

Aimantation:

$$M = n^* \langle \mu_z \rangle = n^* g\mu_B \frac{d \ln(Z)}{dx} = n^* g\mu_B \left[\frac{m+1/2}{\tanh[(m+1/2)x]} - \frac{1/2}{\tanh[(1/2)x]} \right]$$

$$M_\infty = n^* g\mu_B$$

□ 16- régime $x \ll 1$:

$$\tanh(x) \approx x - \frac{x^3}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tanh(x)} \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow M = \frac{M_\infty}{3} [m(m+1)x] = \frac{n^* g\mu_B}{3} \left[m(m+1) \frac{g\mu_B B}{k_B T} \right]$$

$$\Rightarrow M = \gamma \frac{B}{T} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{n^* g\mu_B}{3} \left[m(m+1) \frac{g\mu_B}{k_B} \right] = m(m+1) \frac{n^* \mu_B^2 g^2}{3k_B}$$

□ 17- $m = 3/2$

$$f(x) = \frac{M(x)}{M_\infty} = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{2 \tanh(x/2)} \quad \text{ou} \quad M(x) = M_\infty \times f(x)$$

• raisons physiques

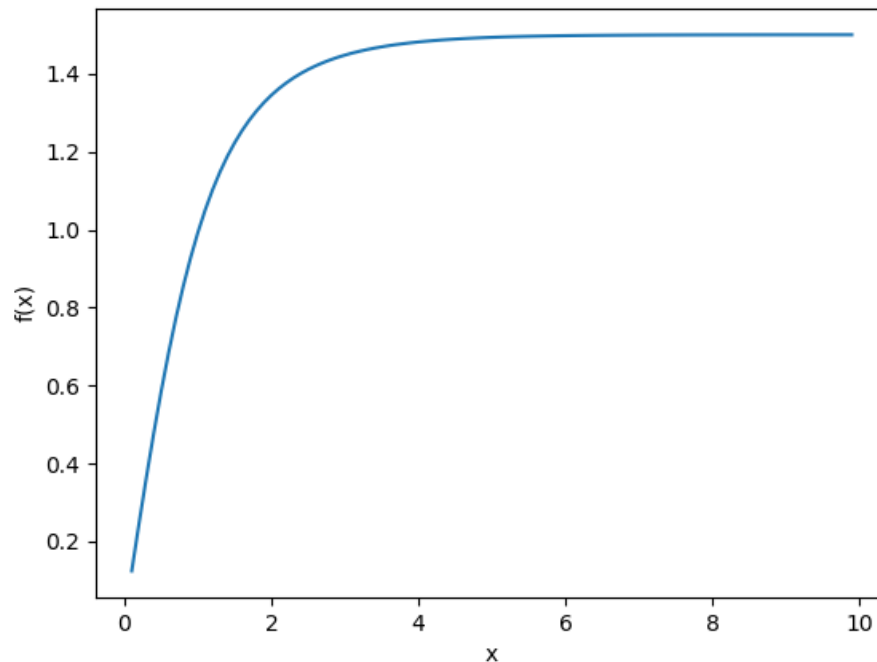
◦ $f(x)$ tend vers 0 pour $x \ll 1$; champs B faibles ou températures T élevées:

L'agitation thermique entraîne le désordre, et par conséquent les moments magnétiques se trouvent orientés au hasard et l'aimantation est, alors, nulle.

- $f(x)$ présente une asymptote horizontale pour $x \gg 1$; champs B forts ou températures T basses:

Tout les moments magnétiques se trouvent pratiquement orientés dans la direction du champ B ; l'aimantation tend, alors, vers une valeur dite "aimantation à saturation".

- allure de $f(x)$



- susceptibilité magnétique

$$\chi = \frac{5\mu_0 n^* \mu_B^2 g^2}{4k_B T} = 8,8 \times 10^{-5}$$

Cette valeur est de même ordre de grandeur que la valeur expérimentale.

□ 18–

$$du = Tds + BdM$$

- l'équivalent du terme BdM pour un gaz soumis à des forces de pression est le travail de ces forces: $-pdV$;
- fonction enthalpie $h = u - BM$

$$dh = du - BdM - MdB = Tds - MdB$$

- la variation ds de l'entropie

$$dh = c_B dT = Tds - MdB \quad \Rightarrow \quad ds = c_B \frac{dT}{T} + \frac{M}{T} dB$$

□ **19-** la loi de curie

$$M = \gamma \frac{B}{T} \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{c_B}{T} dT + \gamma \frac{B}{T^2} dB$$

l'entropie s est fonction d'état; ds est différentielle totale exacte, soit:

$$\left[\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{c_B}{T} \right) \right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\gamma \frac{B}{T^2} \right) \right]_B \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{c_B}{T} \right) = -2\gamma \frac{B}{T^3}$$

soit:

$$\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{c_B}{T} \right)_T = \eta \frac{\gamma B}{T^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{\eta = -2} \quad (1)$$

l'expression de c_B par intégration de l'équation (1)

$$\frac{c_B}{T} = -2\gamma \frac{B^2}{T^3} + Cte \quad \text{ou} \quad c_B = -\frac{\gamma B^2}{T^2} + A(\text{constante d'intégration})$$

détermination de A

$$c_B(T, B=0) = \frac{\alpha}{T^2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\alpha}{T^2}$$

d'où:

$$\boxed{c_B = \frac{\alpha - \gamma B^2}{T^2}}$$

□ **20-** on a abaissement du champ B de $B_i = 20 \text{ mT}$ à $B_f = 2,0 \text{ mT}$ et variation de la température T de $T_i = 350 \text{ mK}$ à T_f au cours d'une transformation isentropique:

$$ds = 0 = \frac{c_B}{T} dT + \gamma \frac{B}{T^2} dB = \frac{\alpha - \gamma B^2}{T^3} dT + \gamma \frac{B}{T^2} dB$$

soit:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma B dB}{-\alpha + \gamma B^2} \quad \Rightarrow \quad \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \int_{B_i}^{B_f} \frac{2\gamma B dB}{-\alpha + \gamma B^2} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{-\alpha + \gamma B_f^2}{-\alpha + \gamma B_i^2}\right)$$

ce qui donne:

$$T_f = T_i \sqrt{\frac{-\alpha + \gamma B_f^2}{-\alpha + \gamma B_i^2}}$$

cas où $\alpha = 0$

$$\boxed{T_f(\alpha = 0) = T_i \frac{B_f}{B_i} = 35 \text{ mK}}$$