

# CCINP Physique PC 2019

## Proposition de corrigé

Ce corrigé a été rédigé par David LASNE. N'hésitez pas à me signaler par mail (david.lasne@wanadoo.fr) toute coquille ou erreur. Vous pouvez le distribuer à vos élèves. Merci à Matthieu RIGAUT pour les discussions et la correction.

Par ailleurs quelques imperfections ou ambiguïtés repérées dans l'énoncé de cette épreuve sont notées en rouge au fur et à mesure.

### Partie I - Limite du modèle de J. J. THOMSON à travers l'expérience de E. RUTHERFORD

**Q1.** Si la charge positive était répartie uniformément, le "rebond" ne serait pas aléatoire : soit l'énergie cinétique initiale est trop faible et la répulsion électrostatique revoie les particules alpha, soit elle est suffisante et elles passent toutes au travers.

**Q2.** Il s'agit de la force électrostatique entre la charge  $2e$  de la particule alpha et la charge  $Ze$  du noyau d'or donc d'après

le cours :  $\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{e}_r = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r$ . C'est une force newtonienne dont l'énergie potentielle s'écrit  $E_p(d) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{K}{d}$  (la constante est nulle pour avoir la limite demandée).

Cette force est à la fois centrale, ce qui implique que le moment cinétique est conservé, et conservative, ce qui implique la conservation de l'énergie mécanique (car c'est la seule force en présence ici).

**Q3.** L'énergie mécanique étant constante, elle vaut sa valeur initiale. Or à  $t = 0$ , la particule est à l'infini donc son énergie potentielle est nulle. Il reste donc simplement  $E_M = E_M(t = 0) = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$ .

**Q4.** Par définition  $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM_0} \wedge m_\alpha \vec{v}_0 = (X\vec{e}_x + b\vec{e}_y) \wedge m_\alpha v_0 \vec{e}_x$

$$\vec{L}_O = -m_\alpha b v_0 \vec{e}_z$$

**Q5.** De même à un instant quelconque :  $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m_\alpha \vec{v} = d\vec{e}_r \wedge m_\alpha (d\vec{e}_r + d\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$

$$\vec{L}_O = m_\alpha d^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

On a donc à chaque instant, par conservation de  $\vec{L}_O$  :  $d^2 \dot{\theta} = -b v_0$ .

**Q6.** Au sommet de la trajectoire, on peut à nouveau calculer  $\vec{L}_O$  facilement car la vitesse est orthogonale au rayon. On en déduit  $d_m v_S = b v_0$  par conservation.

Et par conservation de l'énergie mécanique, on a

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_S^2 + \frac{K}{d_m} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$$

En remplaçant  $v_S$  par la relation précédente et en multipliant tout par  $\frac{2d_m^2}{m_\alpha v_0^2}$ , on obtient :

$$d_m^2 - \frac{2K}{m_\alpha v_0^2} d_m - b^2 = 0$$

On résout cette équation du second degré :

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{m_\alpha^2 v_0^4} + b^2}$$

Seule la solution avec un "+" est positive donc on garde

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} + \sqrt{\frac{K^2}{m_\alpha^2 v_0^4} + b^2}$$

**Q7.** Le PFD projeté sur  $\vec{e}_x$  donne :

$$m_\alpha \frac{dv_x}{dt} = \frac{K}{d^2} \cos \theta = -\frac{K}{b v_0} \dot{\theta} \cos \theta$$

On intègre cette relation entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$  :

$$m_\alpha(v_x(\infty) - v_0) = -\frac{K}{bv_0} [\sin \theta]_0^\infty$$

Or  $v_x(\infty) = v_0 \cos \varphi$ ,  $\theta(0) = \pi$  et  $\theta(\infty) = \varphi$  :

$$m_\alpha v_0(1 - \cos \varphi) = -\frac{K}{bv_0} \sin \varphi$$

En utilisant les formules de l'énoncé, on obtient :

$$2m_\alpha v_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{K}{bv_0} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

Donc en simplifiant on obtient la relation demandée :

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{K}{m_\alpha b v_0^2}$$

**Q8.** Il y aura "rebond" si  $\varphi > \frac{\pi}{2}$ , pour que les particules repartent en arrière.

Ceci nécessite que  $b < \frac{K}{m_\alpha v_0^2}$ , donc que  $b$  soit "suffisamment petit" : il faut envoyer la particule alpha "suffisamment près" du noyau pour voir l'effet.

**Q9.** En reprenant l'expression de  $d_m$  :

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{m_\alpha^2 v_0^4 b^2}{K^2}} \right)$$

On reconnaît sous la racine l'expression correspondant à  $\tan \frac{\varphi}{2}$  :

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}} \right) = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \right)$$

En simplifiant (car  $\sin \frac{\varphi}{2} > 0$  ici), on obtient bien :

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)$$

**Q10.**  $d_m$  est minimale lorsque  $\sin \frac{\varphi}{2}$  est maximal donc pour  $\varphi = \boxed{\varphi_m = \pi}$ . On a alors  $\boxed{d_{m,min} = \frac{2K}{m_\alpha v_0^2}}$ .

**Q11.** Avec la relation de la Q7., on vérifie que cette situation correspond à  $\boxed{b \rightarrow 0}$ . La trajectoire est alors rectiligne, droit en direction du noyau, avec un demi-tour à une distance  $d_{m,min}$  de  $O$ . Si la particule peut arriver jusqu'en  $d_{m,min}$  avant de faire demi-tour, c'est que le noyau est un peu plus loin, donc plus petit que  $d_{m,min}$ .

*Application numérique :*  $d_{m,min} = \frac{2K}{m_\alpha v_0^2} = \frac{K}{E_c} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 E_c} \approx 5.10^{-14} \text{ m}$

**Q12.** Pour sonder l'intérieur du noyau, il faut diminuer  $d_{m,min}$  donc augmenter l'énergie cinétique des particules incidentes.

## Partie II - Limite du modèle planétaire

**Q13.**

On applique le PFD à l'électron, soumis uniquement à la force électrostatique et on le projette dans la base cylindrique (avec  $r = cste$ ) :

$$\begin{cases} m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \\ -m_e r \dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ m_e r \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que la norme de la vitesse est constante et que finalement  $\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \vec{e}_\theta}$ .

**Q14.** L'énergie mécanique s'écrit :  $E_M = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$  en remplaçant par l'expression de  $v$ . On a donc  $A = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}$

et  $f(r) = \frac{1}{r}$ .

**Q15.**  $\omega = \dot{\theta} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}}$  donc en remplaçant dans l'expression de  $P(r)$ , on obtient :

$$P(r) = \frac{P_0}{r^4} \text{ avec } P_0 = \frac{e^6}{192\pi^3 c^3 \epsilon_0^3 m_e^2}$$

Si  $P(r)$  est une puissance (fallait-il le redémontrer?),  $P_0$  s'exprime en  $\text{W.m}^4$ .

$P(r)$  représente l'énergie perdue par rayonnement par unité de temps, donc l'énergie mécanique de l'électron diminue. Comme  $A < 0$  et  $f(r)$  est décroissante, le rayon diminue aussi.

**Q16.** On applique le théorème de la puissance mécanique (ie un bilan d'énergie mécanique) à l'électron, sachant que  $P(r)$  est la puissance perdue. On a donc :

$$\frac{dE_M}{dt} = -P(r) \Rightarrow -\frac{A}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{P_0}{r^4}$$

$$r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$$

Comme  $A < 0$ , le rayon diminue bien.

**Q17.** On sépare les variables avant d'intégrer :

$$\int_R^0 r^2 dr = \int_0^{t_f} \frac{P_0}{A} dt \Rightarrow t_f = -\frac{AR^3}{3P_0}$$

Application numérique :  $\frac{-A}{P_0} = \frac{24\pi^2 c^3 \epsilon_0^2 m_e^2}{e^4} \approx 6,4 \cdot 10^{20} \text{ s.m}^{-3}$  donc  $t_f \approx 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ . L'atome ne serait stable que pendant un temps infiniment court, c'est impossible.

## Partie III - Postulats de N. BOHR

**Q18.** D'après le postulat mécanique,  $L = n\hbar$ . Or pour une trajectoire circulaire, on a  $L = m_e r v = \frac{m_e r e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$  donc en remplaçant et en élevant au carré, on obtient :

$$r = n^2 r_0 \text{ avec } r_0 = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}$$

Application numérique :  $r_0 = 53 \text{ pm}$

**Q19.** Le périmètre vérifie :  $\mathcal{P} = 2\pi r = n\lambda$ . Or d'après DE BROGLIE,  $\lambda = \frac{h}{p}$ . On en déduit  $r = n \frac{h}{p}$  soit  $L = r p = n\hbar$  qui est le postulat mécanique précédent.

**Q20.** On remplace  $r$  par son expression dans l'énergie mécanique et il vient  $E_M = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 n^2 r_0}$  donc on a bien  $E_M = -\frac{E_0}{n^2}$  avec

$$E_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2}$$

Application numérique :  $E_0 \approx 13 \text{ eV}$

Physiquement,  $E_0$  est l'énergie d'ionisation du niveau fondamental.

**Q21.** D'après la relation de PLANCK-EINSTEIN, l'énergie du photon émis s'écrit :

$$E_\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{n_i} - E_{n_f} = -E_0 \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

On a donc bien

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \text{ avec } R_H = \frac{E_0}{hc}$$

Application numérique :  $R_H \approx 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ .

**Q22.** Ces trois raies sont dans l'ultraviolet.

On trouve pour les 3 raies ( $n_i = 2, 3$  ou  $4$ ) on trouve bien  $R_H \approx 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$  en gardant 2 chiffres significatifs.

Les trois valeurs obtenues sont en très bon accord avec la théorie. Cependant, ce modèle n'est valable que pour l'hydrogène et les ions hydrogénoïdes (avec 1 seul électron).

## Partie IV - Expérience de O. STERN et W. GERLACH

**Q23.** Par définition du moment magnétique,  $\vec{m} = IS\vec{n}$  avec  $S = \pi r^2$  et  $\vec{n} = \vec{e}_z$  si on oriente  $I$  dans le sens de  $\vec{e}_\theta$ . Or l'électron fait un tour par période, avec une charge  $-e$ , donc le courant vaut  $I = -\frac{e}{T}$ , avec  $T = \frac{2\pi r}{v}$  donc finalement  $\vec{m} = -\frac{erv}{2}\vec{e}_z$ .

Le moment cinétique vaut quant à lui  $\vec{L} = m_e r \vec{e}_r \wedge v \vec{e}_\theta = mrv \vec{e}_z$ .

On a donc bien proportionnalité :

$$\vec{m} = \gamma_e \vec{L} \text{ avec } \gamma_e = \frac{-e}{2m}$$

**Q24.** En appliquant le TMC en  $C$  au dipôle, on a

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma}(C) = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

En remplaçant par le moment magnétique et le rapport gyromagnétique, on a :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma_e \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Si on projette sur  $\vec{e}_z$  cette équation, comme  $\vec{B}$  est selon  $\vec{e}_z$ , le produit vectoriel est orthogonal à  $\vec{e}_z$  donc  $\frac{dm_z}{dt} = 0$  soit  $m_z = \text{cste}$ . De plus, en multipliant scalairement par  $\vec{m}$ , il vient :

$$\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{m}^2}{dt} = \vec{m} \cdot \gamma_e (\vec{m} \wedge \vec{B}) = 0$$

On en déduit que  $\vec{m}^2 = \text{cste}$  donc que  $m = \|\vec{m}\| = \text{cste}$ .

**Q25.** Reprenant la relation précédente, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma_e \vec{B} \wedge \vec{m}$$

On reconnaît la forme donnée par l'énoncé pour un vecteur dont l'extrémité décrit un cercle, en prenant comme vecteur rotation

$$\vec{\Omega}_L = -\gamma_e \vec{B}, \text{ donc avec la pulsation } \Omega_L = -\gamma_e B = \frac{eB}{2m_e}.$$

**Q26.** Si le champ était uniforme, la force  $\vec{F} = (\vec{m} \cdot \text{grad})\vec{B}$  serait nulle et les atomes ne seraient jamais déviés.

**Q27.** Les lignes de champ sont quasi-verticales car la principale composante est sur  $\vec{e}_z$ .

Les lignes de champ sont dans le plan  $yOz$  car la composante en  $x$  est supposée nulle. De plus l'énoncé semble supposer une invariance selon  $x$  ce qui explique qu'on puisse prendre une coupe quelconque.

Le plan  $xOz$  est un plan de symétrie du problème donc  $B_z(y, z)$  est paire en  $y$ .

**Q28.** Dans le vide, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{MAXWELL-GAUSS : } \text{div} \vec{E} = 0 \\ \text{MAXWELL-FARADAY : } \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ (régime stationnaire)} \\ \text{MAXWELL-THOMSON : } \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{MAXWELL-AMPÈRE : } \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \text{ (régime stationnaire)} \end{cases}$$

Avec MAXWELL-AMPÈRE, on obtient en écrivant le rotationnel :

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0$$

Comme  $\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ , on a nécessairement  $\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)_{y=0} = 0$ .

**Q29.** L'énoncé semble supposer, sans l'indiquer explicitement, que toute dépendance en  $x$  est négligée. On calcule alors la force (en  $y = 0$ ) :

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= (\vec{m} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{B} \\
 &= m_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + m_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + m_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \\
 &= m_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \vec{e}_y + m_y \frac{\partial B_z}{\partial y} \vec{e}_z + m_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z + m_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{e}_y
 \end{aligned}$$

**Q30.** On estime  $\Omega_L$  et la période de révolution associée :

*Application numérique :*  $\Omega_L \approx 8.8.10^{10} \text{ rad.s}^{-1}$  soit  $T_L \approx 7.1.10^{-11} \text{ s}$

Lors de la traversée, l'atome effectue un très grand nombre de précessions autour de l'axe  $z$ , donc  $m_y$  change très rapidement de signe, avec une moyenne nulle :  $\langle m_y \rangle = 0$ . On peut donc se contenter de la composante sur  $\vec{e}_z$  dans la force.

**Q31.** Les lignes de champ sont orientées du pôle Nord vers le pôle Sud donc  $B_z > 0$ . De plus, les lignes de champ se resserrent au voisinage de l'aimant du haut, donc le champ  $y$  est plus intense, donc  $\frac{\partial B_z}{\partial z} > 0$ . On en déduit que si  $m_z > 0$ , la force est bien dirigée selon  $+\vec{e}_z$ .

**Q32.** Statistiquement, toutes les orientations de  $\vec{m}$  sont possibles dans le jet incident donc  $m_z$  prend des valeurs dans un intervalle continu : on doit avoir un ensemble de déviations possibles continu.

**Q33.** On en déduit que  $m_z$  (et  $|m|$ ) sont quantifiés.

*NB :* En réalité, la physique quantique montrera qu'avec un seul électron de valence,  $m_z$  devrait prendre 3 valeurs quantifiées et non 2 ( $m = -1, 0, 1$ ) : ce sont en fait les 2 valeurs possibles du *spin* de l'électron qu'ont observées STERN et GERLACH.

## Partie V - L'effet ZEEMAN normal

**Q34.** D'après la relation de PLANCK-EINSTEIN, l'énergie du photon émis s'écrit :  $\frac{hc}{\lambda} = E_2 - E_1$ . Si l'écart d'énergie est faible, on peut différentier (en valeur absolue) :

$$\Delta E \approx \frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda \Rightarrow \Delta \lambda \approx \frac{\lambda_0^2 \Delta E}{hc}$$

*Application numérique :*  $\Delta \lambda \approx 0,02 \text{ nm}$

**Q35.** Le calcul est totalement analogue à celui de la lame d'air sur un MICHELSON. Le rayon 2 parcourt en plus le trajet  $(M_1 O_1 M_2) = \frac{2e}{\cos \theta}$  auquel il faut soustraire le chemin optique  $(M_1 H) = M_1 M_2 \sin \theta = 2e \tan \theta \sin \theta$  en notant  $H$  le projeté orthogonal de  $M_2$  sur le rayon 1. D'après le théorème de MALUS (et le principe de retour inverse de la lumière) le chemin optique est ensuite le même pour les 2 rayons. On obtient donc

$$\delta = \frac{2e}{\cos \theta} - 2e \tan \theta \sin \theta = 2e \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = 2e \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta}$$

On a donc bien  $\delta = 2e \cos \theta$  donc une différence de phase  $\varphi = \frac{4\pi e \cos \theta}{\lambda}$ .

**Q36.** les rayons qui interfèrent sont parallèles, ils "se croisent" donc à l'infini. Il faut donc mettre l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente (ou éventuellement à très grande distance). On obtient comme dans le cas du MICHELSON en lame d'air, des anneaux d'égale inclinaison.

**Q37.** L'intensité est maximale lorsque les rayons interfèrent constructivement, donc lorsque  $\varphi = k.2\pi$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

**Q38.** L'intensité lumineuse étant proportionnelle au carré de l'amplitude, on peut remplacer  $r^2$  par  $R$  et  $t^2$  par  $1 - R$ , ce qui donne :

$$m = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

Quel est l'intérêt de la question ? Le résultat n'est pas utilisé par la suite car le résultat est donné. De plus, le lien entre  $r$ ,  $t$  et  $R$  n'est pas explicitement une relation du cours et mériterait une justification plus précise

**Q39.** D'après l'expression donnée de la largeur à mi-hauteur,  $\Delta \varphi_{1/2}$  décroît avec  $R$ , donc la courbe  $c$  où les pics sont les plus fins correspond à la plus grande valeur de  $R$ . On a alors un meilleur contraste donc des franges fines sur fond noir. Finalement, on peut dire que  $R_a = 0,1$  ;  $R_b = 0,5$  ;  $R_c = 0,1$ .

**Q40.** Plus  $R$  est important, moins la lumière sort de la cavité donc le fond est très sombre, sauf pour les quelques valeurs de  $\varphi$  qui donnent des interférences constructives intenses.

**Q41.** Au centre,  $\theta = 0$  donc  $p_0 = \frac{2e}{\lambda}$  qui prend une valeur a priori quelconque. Si  $R$  est suffisamment important, on a de fortes chances d'avoir une zone sombre.

**Q42.** Pour que l'on puisse les distinguer, il faut que le deuxième anneau soit au-delà de la largeur à mi-hauteur du premier, donc on peut estimer que l'on pourra les distinguer si  $\rho_2 > \rho_1 + \Delta\rho_{1/2}$ .

**Q43.** Sous incidence nulle, on a  $\Delta\lambda_{min} = \frac{\lambda^2}{2Fe}$ .

Application numérique :  $\Delta\lambda_{min} \approx 7.10^{-13}$  m : l'effet ZEEEMAN sera bien observable.

## Partie VI - Orbitales atomiques

**Q44.** Une particule quantique est décrite par sa fonction d'onde, avec une approche statistique : on ne parle plus de position ou de trajectoire mais de probabilité de présence.

**Q45.**  $|\varphi(\vec{r})|^2$  représente la densité volumique de probabilité de présence de la particule.

**Q46.** On obtient ce facteur via la condition de normalisation : la somme de toutes les probabilités de présence doit être égale à 1 :  $\iiint_V |\varphi(\vec{r})|^2 d\tau = 1$ .

**Q47.** On injecte la solution proposée dans l'équation de SCHRÖDINGER :

$$E\varphi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-r/r_0} \right) \right) + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \varphi(\vec{r})$$

On développe la dérivée et il vient :

$$E\varphi(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2m_e r_0 \sqrt{\pi r_0^3}} \left( \frac{2}{r} e^{-r/r_0} - \frac{1}{r_0} e^{-r/r_0} \right) + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \varphi(\vec{r})$$

Or compte-tenu de l'expression de  $r_0$ , les deux termes en  $1/r$  se simplifient (ce qui est rassurant car  $E$  est une constante) et on peut alors identifier :

$$E\varphi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} \varphi(\vec{r})$$

On retrouve bien, en remplaçant  $r_0$  par son expression  $E_0 = \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}$ .

**Q48.** On note  $dP(r)$  la probabilité de trouver la particule entre  $r$  et  $r + dr$ . On a alors :

$$dP(r) = 4\pi r^2 dr |\varphi(r)|^2$$

En remplaçant par l'expression de  $\varphi(r)$ , on obtient :

$$dP(r) = \frac{4r^2}{r_0^3} e^{-2r/r_0} dr$$

La densité de probabilité radiale est donc  $P(r) = \frac{4r^2}{r_0^3} e^{-2r/r_0}$ .

**Q49.** On obtient la moyenne en calculant l'intégrale de  $\int_0^\infty r.P(r)dr$ . Le résultat obtenu donne une moyenne supérieure à  $r_0$  (maximum de  $P(r)$ ) car la fonction est "plus étalée" sur la droite du pic donc ces valeurs contribuent à déplacer la moyenne. **Je ne suis pas convaincu de l'intérêt de la question, ni de la réponse...**

**\*\*\* FIN DU CORRIGE \*\*\***