

PROBLÈME 1 – Autour de la randonnée

Partie I – La marche à pied

I.1 Marcher en montagne

Q1. $\vec{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}$ donc $\boxed{\vec{P} = 0}$ puisque le point d'appui est immobile.

Q2. Énergie potentielle de pesanteur : $\boxed{E_p = mgz_I + Cte}$.

Q3. $E_c(A) = 0$; $E_c(B) = 0$ et donc $\boxed{\Delta E_c = 0}$.

Q4. Par définition, $E_m = E_c + E_p$. On a donc $\Delta E_m = mgz_B - mgz_A + 0$ soit $\boxed{\Delta E_m = mgh}$.

Q5. Application numérique : $\Delta E_m \approx 0,6$ MJ.

Q6. Sans dénivellé, on trouve $\Delta E_m = 0$. On retrouve que la randonnée avec dénivellé est « plus fatigante » que la randonnée sur du plat : il faut fournir 0,6 MJ en plus.

Q7. La randonnée représente donc un surplus de dépense d'énergie de 5 % par rapport à une journée « normale ». Sur une journée, ça ne paraît pas énorme, en revanche, pour chaque heure de randonnée, on dépense plus du double de l'énergie d'une heure au repos (+120%).

Q8. Le randonneur doit ingurgiter 12,6 MJ pour compenser les dépenses totales de son organisme le jour de l'ascension.

I.2 Le champ de pesanteur et l'altitude

Q9. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie pour la distribution de masse, donc pour le champ. Donc $\vec{\mathcal{G}}(M) \cdot \vec{e}_\varphi = 0$.

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ est un plan de symétrie pour la distribution de masse, donc pour le champ. Donc $\vec{\mathcal{G}}(M) \cdot \vec{e}_\theta = 0$.

Finalement $\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r}$.

Q10. On a invariance par rotation d'angles θ et φ donc $\mathcal{G}(M)$ ne dépend ni de θ ni de φ . On a donc $\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r) \vec{e}_r}$: la composante radiale du champ gravitationnel ne dépend donc que de r .

Q11. Dans le théorème de Gauss pour l'électrostatique, l'analogue de $\vec{\mathcal{G}}(M)$ est le champ électrique $\vec{E}(M)$; l'analogue de m est la charge électrique q et l'analogue de G est $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ où ϵ_0 est la permittivité du vide.

Q12. On sait que $\vec{f} = -\frac{Gmm'G}{r^2} \vec{e}_r$ donc $\text{kg m s}^{-2} = \text{kg}^2 [G] \text{m}^{-2}$ donc $\boxed{[G] = \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}}$.

Q13. On prend pour surface de Gauss la sphère de centre O et de rayon $r > R_T$. On applique alors le théorème de Gauss et il vient :

$$4\pi r^2 \mathcal{G}(M) = -4\pi G M_T \quad \text{et donc} \quad \boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{G M_T}{r^2} \vec{e}_r}$$

Q14. Calculons la variation de $\mathcal{G}$ entre les altitudes 0 ($r = R_T$) et a ($r = R_T + a$) :

$$\Delta \mathcal{G} = G M_T \left(\frac{1}{(R_T + a)^2} - \frac{1}{R_T^2} \right) = \frac{G M_T}{R_T^2} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{a}{R_T}\right)^2} - 1 \right)$$

On effectue alors un D.L. à l'ordre 1 en a/R_T car $\frac{a}{R_T} \ll 1$ et on obtient :

$$\Delta \mathcal{G} \approx \frac{G M_T}{R_T^2} \left(1 - 2 \frac{a}{R_T} - 1 \right) \Rightarrow \boxed{|\Delta \mathcal{G}| \approx \frac{2 G M_T a}{R_T^3}} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Q15. Numériquement, pour un dénivellé de 1 km, on trouve $\boxed{|\Delta \mathcal{G}| \approx 4 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}}$. Pour savoir si $|\Delta \mathcal{G}|$ est négligeable, il convient de le comparer à $g = \mathcal{G}(R_T) = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. La variation de $\mathcal{G}$ représente donc moins de 0,05% de la valeur nominale et est donc tout à fait négligeable.

I.3 Marcher à son rythme pour aller loin

Q16. On a $L_{Ox} = J \frac{d\gamma}{dt}$.

Q17. La liaison pivot en O étant supposée parfaite, elle ne travaille pas donc son moment par rapport à $(O, \vec{e}_x)$ est nul.

Q18. On a $\Gamma_{Ox} = (\vec{OH} \wedge m_0 \vec{g}) \cdot \vec{e}_x$; on trouve $\Gamma_{Ox} = -m_0 g d' \sin \gamma$.

Q19. On applique le théorème du moment dynamique, en projection sur l'axe (Ox) , et il vient : $\frac{dL_{Ox}}{dt} = \Gamma_{Ox}$. On aboutit

à l'équation différentielle suivante : $\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{m_0 g d'}{J} \sin \gamma = 0$.

Q20. On a une rotation d'axe (Ox) et J est le moment d'inertie par rapport à cet axe, donc $E_c = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2$.

Q21. D'après le théorème de l'énergie mécanique $\Delta E_m = W_{NC}$. Or la seule action mécanique qui ne dérive pas d'une énergie potentielle – l'action de contact en O – ne travaille pas puisque la liaison est parfaite. Donc $W_{NC} = 0$ et l'énergie mécanique de la jambe se conserve au cours du temps.

Q22. On écrit donc que la puissance mécanique est nulle :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \right) + \frac{d}{dt} (-m_0 g d' \cos \gamma) = 0 \Leftrightarrow J \frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot \frac{d\gamma}{dt} + m_0 g d' \frac{d\gamma}{dt} \sin \gamma = 0$$

comme $\frac{d\gamma}{dt}$ n'est pas identiquement nulle, on peut simplifier et on retrouve : $\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{m_0 g d'}{J} \sin \gamma = 0$.

Q23. Dans le cas des petites oscillations, on peut linéariser l'équation précédente en remarquant que $\sin \gamma \approx \gamma$ si $\gamma \ll 1$ rad. On obtient alors l'équation différentielle : $\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{m_0 g d'}{J} \gamma = 0$.

On reconnaît une équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0^2 = \frac{m g d'}{J}$. La période propre

des oscillation de la jambe vaut alors $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m_0 g d'}}$. C.Q.F.D.

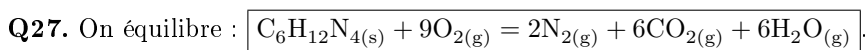
Q24. Remplaçons J par son expression : $T = 2\pi \sqrt{\frac{k m_0 d^2}{m_0 g d/2}}$ soit $T = 2\pi \sqrt{\frac{2kd}{g}}$. On retrouve bien que la période est indépendante de la masse de la jambe et proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la jambe (d).

Q25. $\sqrt{40} \approx 6$ et $\sqrt{90} \approx 9$. Le rapport de proportionnalité est donc d'1,5. La période propre d'oscillations de la jambe d'un randonneur enfant sera donc d'environ 1 s.

Q26. Soit γ_0 l'amplitude d'un pas. La distance parcourue lors d'un pas vaut donc $p = 2d \sin \gamma_{max}$. En admettant qu'un adulte et un enfant ont la même amplitude maximale de pas (γ_{max} identique), on trouve que la longueur du pas est proportionnelle à la longueur de la jambe. En notant p_a le pas de l'adulte et p_e celui de l'enfant, on trouve donc $\frac{p_a}{p_e} = \frac{d_a}{d_e}$. Or la vitesse vaut $v = 4p/T$. Donc $\frac{v_a}{v_e} = \frac{p_a}{p_e} \cdot \frac{T_e}{T_a} = \frac{d_a}{d_e} \cdot \frac{\sqrt{d_e}}{\sqrt{d_a}}$. Finalement $\frac{v_a}{v_e} = \frac{\sqrt{d_a}}{\sqrt{d_e}}$. On retrouve bien que la vitesse de l'enfant sera 1,5 fois plus petite que celle de l'adulte.

Partie II – Le repas en altitude

II.1 La combustion des tablettes d'hexamine solide



Q28. Les enthalpies standard de formation du diazote gazeux et du dioxygène gazeux à 25°C sont nulles car ce sont des corps purs simples dans leur état standard de référence.

Q29. $\Delta_r H^0 = 2\Delta_f H^0(\text{N}_2) + 6\Delta_f H^0(\text{CO}_2) + 6\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) - 9\Delta_f H^0(\text{O}_2) - \Delta_f H^0(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4)$ soit, numériquement :

$\Delta_r H^0 = 0 + 6 \times (-400) + 6 \times (-250) - 123$ soit $\Delta_r H^0 \approx -4 \times 10^3 \text{ kJ mol}^{-1}$. Cette réaction est très exothermique (car $\Delta_r H^0 < 0$), ce qui correspond bien à une combustion.

Q30. La chaleur **reçue algébriquement** par la combustion d'une mole d'hexamine de façon **isobare** vaut $Q_m = \Delta_r H^0$. Par conséquent, la chaleur libérée par cette même combustion vaut $-Q_m$. Pour un kilogramme de combustible, on aura donc $-Q_m/M_h$. D'où la définition donnée : $PC = -\frac{\Delta_r H^0}{M_h}$.

Q31. Numériquement : $PC = \frac{4 \times 10^3}{140 \times 10^{-3}}$ soit $PC = 3 \times 10^7 \text{ J kg}^{-1}$. On retrouve sensiblement la valeur du fournisseur de 31 MJ kg^{-1} (l'écart est inférieur à 5%).

Q32. D'après la loi de modération de Le Chatelier, toute diminution isotherme de la pression déplace l'équilibre dans le sens d'une création de gaz. Soit ici dans le sens direct. La réaction est donc favorisée à basses pression et le réchaud sera (plus) performant en altitude.

Q33. L'énergie délivrée par la combustion des deux tablettes de 4 g est donc $Q_c = 248 \text{ kJ} \approx 2 \times 10^5 \text{ J}$.

Q34. On applique le premier principe : $\Delta U = W + Q$. Il n'y a pas de pièce mobile ni de variation de volume donc $W = 0$. Pour un liquide, $\Delta U = \Delta H = C\Delta T$. La capacité calorifique de l'eau (liquide) est $C_{eau} = c_{eau}m_{eau}$ et finalement $Q = \mu_{eau}Vc_{eau}(T_2 - T_1)$. Numériquement $Q = 1 \times 0,25 \times 4,2 \times 80$ d'où $Q = 84 \text{ kJ}$.

Q35. Le fournisseur espère donc atteindre un rendement de $\eta = Q/Q_c$ soit $\eta \approx 33\%$.

Q36. Pour un changement d'état à pression (et température) constante, on a $Q_{vap} = ml_{vap}$. Ici, on considère donc : $Q_{vap} = \mu_{eau}V'l_v$. Numériquement : $Q_{vap} = 115 \text{ kJ}$. On constate qu'il faut plus d'énergie pour vaporiser 0,05 L d'eau à 100°C et maintenir ainsi l'ébullition que pour porter à ébullition 0,25 L d'eau. La vaporisation est une transformation très endothermique.

Q37. Le but du couvercle est de limiter les pertes thermiques par **convection** afin de « garder » la chaleur ainsi que de limiter l'évaporation.

II.2 Utilisation du réchaud en altitude

Q38. L'air est composé pour l'essentiel de diazote (environ 80 %) et de dioxygène (environ 20%). Les autres gaz sont présents en très faibles proportions. Ces deux gaz étant diatomiques, on considère que l'air est diatomique.

Q39. On a par définition $\mu = \frac{m}{V}$. En utilisant la loi des gaz parfaits, il vient donc $\mu = \frac{M_{air}p}{RT_0}$.

Q40. En remplaçant dans la loi fondamentale de la statique des fluides, il vient :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{M_{air}g}{RT_0}p \iff \frac{dp}{p} + \frac{p}{D} = 0 \text{ avec } D = \frac{RT_0}{M_{air}g}$$

Q41. D'après l'équation différentielle, D et z doivent être homogènes donc D s'exprime en mètres. Vérifions à l'aide de l'expression de D :

$$[D] = \frac{\text{J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times \text{K}}{\text{kg mol}^{-1} \times \text{m s}^{-2}} = \frac{\text{J}}{\text{kg m s}^{-2}} = \frac{\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}}{\text{kg m s}^{-2}} = \text{m}$$

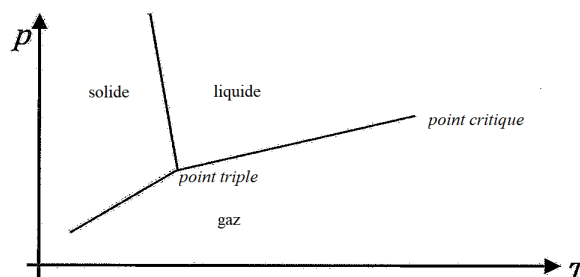
On retrouve bien que D est homogène à une longueur.

Q42. On résout l'équation différentielle précédente, et on trouve, compte tenu des conditions initiales

$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{D}\right)$. Cette expression confirme que la pression diminue lorsque l'altitude augmente.

Q43. En utilisant l'annexe, on trouve que $p(2 \text{ km}) \approx 0,8 \text{ bar}$.

Q44. Diagramme de l'eau complété ci-contre.



Q45. Le diagramme de la figure 3 montre que la pression de l'équilibre liquide-vapeur est une fonction croissante de la température. Or on a montré Q42. que la pression diminue avec l'altitude, donc la température d'ébullition diminue avec l'altitude.

Q46. À deux kilomètres d'altitude, on constate que la température d'ébullition est d'environ 90°C . La cuisson des aliments dans l'eau bouillante sera donc plus longue en altitude.

II.3 Rendre l'eau potable

Q47. Les 5 mL d'eau purifiée n'ont pas besoin d'être mesurés avec une grande précision puisqu'on complète ensuite par de l'eau distillée. L'utilisation d'une éprouvette graduée suffit. Pour peser les quantités adéquates de diiode solide et d'iodure de potassium solide, il faut une balance de laboratoire précise à 0.01 g. On utilise alors une coupelle de pesée et une spatule.

Q48. Le processus de désinfection de l'eau repose sur des réactions d'oxydo-réduction : on traite l'eau par des oxydants afin de tuer virus et bactéries.

Q49. La cinétique du processus est assez lente ; il faut s'assurer que les différentes réactions d'oxydo-réduction aient eu le temps de se dérouler afin de tuer les éventuels virus et bactéries présentes. La température étant un facteur cinétique, ces réactions sont d'autant plus rapides que la température est élevée. C'est pourquoi il faut augmenter le temps de contact avec l'oxydant si la température est basse.

Q50. Le degré d'oxydation de I dans I_2 est 0. Il vaut -I dans I^- . Le couple I_2/I^- constitue donc un couple oxydant réducteur et on peut bien parler du « pouvoir oxydant » de I_2 .

Q51. La solution d'alcool iodé est la solution titrée. On la met donc dans l'Erlenmeyer. Le thiosulfate est la solution titrante. Elle est placée dans la burette graduée.

Q52. On peut écrire la réaction de dosage : $I_2 + 2S_2O_3^{2-} \longrightarrow 2I^- + S_4O_6^{2-}$. Le couple I_2/I^- a un potentiel standard (0,62 V) nettement supérieur à celui du thiosulfate (0,08 V) ; les domaines de prédominance de I_2 et de $S_2O_3^{2-}$ sont donc suffisamment éloignés pour considérer la réaction comme totale.

Q53. L'équivalence est repérée par colorimétrie : en début de dosage, la présence de diiode colore l'amidon en bleu. À l'équivalence, il n'y a plus de diiode et l'amidon devient incolore. La disparition de la coloration de la solution repère donc l'équivalence.

Q54. On peut dresser un tableau d'avancement :

	I_2	+	$2 S_2O_3^{2-}$	$\longrightarrow$	$2 I^-$	+	$S_4O_6^{2-}$
E.I.	$n(I_2)$		$C.V$		0		0
E.F.	$n(I_2) - \xi$		$C.V - 2\xi$		2ξ		ξ

À l'équivalence, les réactifs ont entièrement réagi et $n(I_2) = \frac{CV'}{2}$.

Q55. On a donc $m' = 2M(I)n(I_2)$.

Q56. Déterminons la teneur en diiode ; m' étant la masse de diiode contenue dans 10 g d'alcool iodé, il convient de multiplier m' par 10 afin d'avoir la teneur (en g pour 100 g) de diiode : $\%(I_2) = 10m' = \frac{m'}{m} \times 100 = 2M(I) \frac{CV'}{2m} \times 100$ or $V' = \frac{V}{1000}$ soit

$$\%(I_2) = \frac{M(I)CV \times 100}{m \times 1000}. \text{ Ceci donne bien } \%(I_2) = \frac{C \times V \times 12,69}{m}.$$

Q57. En faisant l'application numérique, on trouve $m' \approx 0,13$ g de diiode dans la prise d'essai (de 10 g).

Q58. Une dizaine de goutte d'alcool iodé représente environ 0,5 mL de cette solution soit environ 0,5 g. On trouve alors qu'en buvant un litre d'eau traitée, on ingurgite environ 6,5 mg de diiode.

Partie III – Beauté de la nature

Q59. D'après les lois de Descartes de la réflexion, on a $\beta = \alpha$.

Q60. Le rayon lumineux change de milieu en passant le dioptre : c'est la réfraction.

Q61. Les interférences sont observées lorsque l'intensité lumineuse résultant de la superposition de deux (ou plus) rayons lumineux diffère de la somme des intensités des différents rayons lumineux. Pour que deux rayons lumineux interfèrent, il faut qu'ils soient synchrones et cohérents (c'est le cas ici car ils sont issus de la même source ponctuelle).

Q62. D'après la relation de Fresnel : $I = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right)$ où I_0 est l'intensité du rayon (a) (ou (b)) pris seul.

Q63. On a $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$. Or, d'après les lois de Descartes pour la réfraction : $n \sin \varphi = n_0 \sin \alpha$ d'où, en remplaçant dans l'expression de $\cos \varphi$, il vient : $\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n^2} \sin^2 \alpha}$. On peut alors remplacer dans l'expression de δ fournie et on trouve :

$$\delta = 2e\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}. \text{ C.Q.F.D.}$$

Q64. En utilisant la relation de Fresnel, on trouve que l'intensité lumineuse est maximum si $\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) = 1$ soit si $\frac{2\pi\delta}{\lambda} = 2p\pi$ avec p entier. On doit donc avoir $\frac{\delta}{\lambda} = p$ pour avoir des interférences constructives.

Q65. D'après l'expression trouvée Q63., on constate que δ dépend de α , donc de β . La longueur d'onde λ correspondant à un ordre p entier dépend donc de β : la couleur observée dépend de la direction d'observation.

Q66. Si on plonge la structure dans l'eau, il faut remplacer n_0 par $n_{eau} \approx 1,3$, ce qui modifie δ . Pour une valeur donnée de β , l'ordre d'interférence est alors entier pour une autre longueur d'onde, ce qui correspond à un changement de couleur.

Q67. Dans l'air, en prenant $\sin \beta = \frac{1}{2}$, on trouve : $\delta = 2e\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} = (p + \frac{1}{2}) \lambda_{bleu}$.

Dans l'acétone, il vient : $\delta = 2e\sqrt{n^2 - \frac{1,4^2}{4}} = (p' + \frac{1}{2}) \lambda_{vert}$ Si l'on connaît n , il devient alors possible de déterminer e à condition de savoir si $p = p'$ ou de connaître la relation entre les deux.

Q68. Si e devient trop grande, la longueur de cohérence peut être dépassée si bien que deux trains d'onde différents se superposent. La cohérence perdue, le déphasage devient aléatoire et le terme d'interférence s'annule dans la formule de Fresnel.

Pour toute remarque et/ou erreur : stephane.lamballe@neuf.fr