

A Naissance de la houle et transport marin

A.1. Pour un écoulement potentiel : $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$, alors $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$.

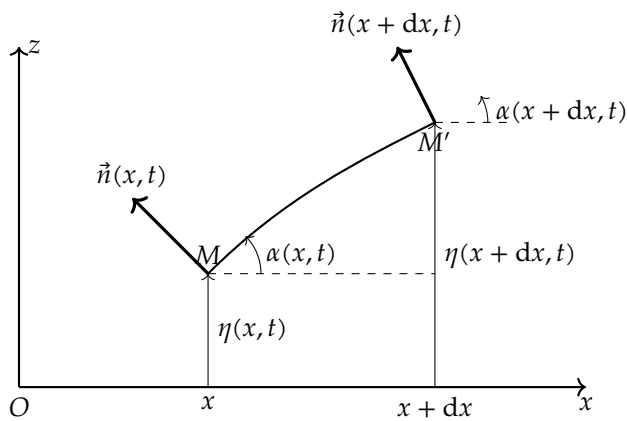
En utilisant les coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}$

Donc $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \end{vmatrix}$. En utilisant le théorème de SCHWARTZ : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$.

Donc $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}}$.

- Le champ magnétique est un champ à rotationnel nul : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$;
- La champ électrique perméant est un champ à rotationnel nul : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$.

A.2. On considère un élément de la surface de séparation entre les deux fluides, entre les abscisses x et $x + dx$.



Alors $\tan \alpha(x, t) = \frac{\eta(x + dx, t) - \eta(x, t)}{dx}$.

Donc au premier ordre en dx : $\tan \alpha(x, t) = \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t)$.

Pour de petits angles : $\tan \alpha(x, t) \simeq \alpha(x, t)$. Donc $\boxed{\alpha(x, t) \simeq \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t)}$

A.3. Le vecteur normal à la surface est $\vec{n}(x, t) = \cos \alpha(x, t) \vec{e}_z - \sin \alpha(x, t) \vec{e}_x$.

Pour de petits angles : $\begin{cases} \cos \alpha(x, t) \simeq 1 \\ \sin \alpha(x, t) \simeq \alpha(x, t) \end{cases}$. Donc $\boxed{\vec{n}(x, t) \simeq \vec{e}_z - \alpha(x, t) \vec{e}_x}$

A.4. La condition de continuité donnée par l'énoncé pour les petits angles s'écrit :

$\begin{cases} \vec{V}_1(x, \eta(x, t), t) \cdot \vec{n}(x, t) = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \\ \vec{V}_2(x, \eta(x, t), t) \cdot \vec{n}(x, t) = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \end{cases}$. Donc $\begin{cases} \vec{v}_1(x, \eta(x, t), t) \cdot \vec{n}(x, t) - U \vec{e}_x \cdot \vec{n}(x, t) = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \\ \vec{v}_2(x, \eta(x, t), t) \cdot \vec{n}(x, t) + U \vec{e}_x \cdot \vec{n}(x, t) = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \end{cases}$

En utilisant l'expression du vecteur normal : $\begin{cases} v_{1,z}(x, \eta(x, t), t) - \alpha(x, t) v_{1,x}(x, \eta(x, t), t) + \alpha(x, t) U = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \\ v_{2,z}(x, \eta(x, t), t) - \alpha(x, t) v_{2,x}(x, \eta(x, t), t) - \alpha(x, t) U = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \end{cases}$

A.5. En utilisant $\vec{v}_j = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_j$ et $\alpha = \frac{\partial \eta}{\partial x}$, les équations précédentes deviennent :

$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(x, \eta(x, t), t) - \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x, \eta(x, t), t) + \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t) U = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(x, \eta(x, t), t) - \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x, \eta(x, t), t) - \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t) U = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \end{cases}$

or, le champ de vitesse est tel que $\left| \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right| \ll U$, on peut donc simplifier l'expression précédente :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(x, \eta(x, t), t) + \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t)U = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(x, \eta(x, t), t) - \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t)U = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \end{cases}$$

A.6. En utilisant un macron pour différencier les grandeurs complexes et réelles, les ondes complexes proposées par l'énoncé

sont :
$$\begin{cases} \underline{\Phi}_1(x, z, t) = \underline{A}_1 e^{i(kx + \omega t)} e^{kz} e^{\lambda t} \\ \underline{\Phi}_2(x, z, t) = \underline{A}_2 e^{i(kx + \omega t)} e^{-kz} e^{\lambda t} \\ \underline{\eta}(x, t) = \underline{B} e^{i(kx + \omega t)} e^{\lambda t} \end{cases}$$

- Les termes en $e^{i(kx + \omega t)}$ décrivent des ondes progressives dans le sens des x croissant ;
- Si $\lambda > 0$, les termes en $e^{\lambda t}$ vont traduire l'instabilité de l'interface. Dans ce cas, l'amplitudes de la houle va croître avec le temps ;
- Si $\lambda < 0$, les termes en $e^{\lambda t}$ vont traduire la stabilité de l'interface. Dans ce cas, l'amplitudes de la houle va décroître avec le temps ;
- Avec $k > 0$, les termes en $e^{\pm kz}$ décrivent la diminution de l'amplitude des ondes avec la distance à l'interface.

A.7. En utilisant la discussion précédente : Si $\lambda > 0$, les vagues apparaissent. Si $\lambda < 0$, les vagues s'atténuent.

A.8. Les équations établies en A.6 sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{\Phi}_1}{\partial z}(x, \eta(x, t), t) + \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t)U = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{\Phi}_2}{\partial z}(x, \eta(x, t), t) - \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t)U = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \end{cases}$$

Donc
$$\begin{cases} k \underline{A}_1 e^{i(kx + \omega t)} e^{k\eta(x, t)} e^{\lambda t} + U i k \underline{B} e^{i(kx + \omega t)} e^{\lambda t} = \sigma \underline{B} e^{i(kx + \omega t)} e^{\lambda t} \\ -k \underline{A}_2 e^{i(kx + \omega t)} e^{k\eta(x, t)} e^{\lambda t} - U i k \underline{B} e^{i(kx + \omega t)} e^{\lambda t} = \sigma \underline{B} e^{i(kx + \omega t)} e^{\lambda t} \end{cases}$$

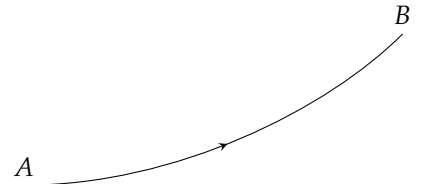
Ce qui se simplifie en :
$$\begin{cases} k \underline{A}_1 e^{k\eta(x, t)} + U i k \underline{B} = \sigma \underline{B} \\ -k \underline{A}_2 e^{k\eta(x, t)} - U i k \underline{B} = \sigma \underline{B} \end{cases}$$

Si on suppose que la longueur d'onde des vagues est grande devant leur amplitude : $e^{k\eta(x, t)} \ll 1$.

Et donc :
$$\begin{cases} k \underline{A}_1 + (U i k - \sigma) \underline{B} = 0 \\ -k \underline{A}_2 - (U i k + \sigma) \underline{B} = 0 \end{cases}$$

A.9. Pour un écoulement parfait stationnaire et incompressible, l'énergie massique des particules de fluide est uniforme le long d'une ligne de courant :

$$\frac{P_A}{\mu} + \frac{1}{2} v_A^2 + g z_A = \frac{P_B}{\mu} + \frac{1}{2} v_B^2 + g z_B$$



Cette version de la relation de BERNOULLI, qui est celle au programme, ne peut pas être utilisée ici, car l'écoulement étudié n'est pas stationnaire.

A.10. Le système d'équations obtenues est alors :

$$\begin{cases} \underline{A}_1 = \frac{\sigma - i k U}{k} \underline{B} \\ \underline{A}_2 = -\frac{\sigma + i k U}{k} \underline{B} \\ \rho_1 (\sigma - i k U) \underline{A}_1 - \rho_2 (\sigma + i k U) \underline{A}_2 + g(\rho_1 - \rho_2) \underline{B} = 0 \end{cases}$$

En éliminant $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ de ces équations : $\rho_1 \frac{(\sigma - i k U)^2}{k} \underline{B} + \rho_2 \frac{(\sigma + i k U)^2}{k} \underline{B} + g(\rho_1 - \rho_2) \underline{B} = 0$

On cherche une solution avec $\underline{B}$ non-nul. Donc
$$a \frac{(\sigma - i k U)^2}{k} + a \frac{(\sigma + i k U)^2}{k} + g(\rho_1 - \rho_2) = 0 \text{ avec } \begin{cases} a = \rho_1 \\ b = \rho_2 \end{cases}$$

A.11. La valeur de $k_{\min}$ peut être calculée à partir de la formule donnée : $k_{\min} = \frac{g(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{4\rho_1\rho_2 U^2}$ et la longueur d'onde correspondante

est $\lambda = \frac{2\pi}{k_{\min}}$.

U	10 km/h	100 km/h
$k_{\min}$	244 m ⁻¹	2,44 m ⁻¹
λ	2,57 cm	2,57 m

Les valeurs des longueurs d'ondes trouvées sont plus faibles que celles observées à la surface des océans.

B Récupérer l'énergie de la houle.

B.1. On note $\alpha = 0,70$, la portion de la surface terrestre recouverte par les océans. La surface occupée par les océans est alors : $S = \alpha 4\pi R_T^2$. Si on suppose que l'eau est mis en mouvement uniquement sur une couche d'épaisseur a , la masse d'eau mis en mouvement par la houle est $M = aS\rho_{\text{eau}}$.

L'énergie cinétique de l'eau est alors : $E_c = \alpha 4\pi R_T^2 a \rho_{\text{eau}} U^2$.

Si cette énergie est crée par le vent en une durée τ , correspondant à la durée de vie d'une vague, la puissance disponible est

$$P_c = \frac{\alpha 4\pi R_T^2 a \rho_{\text{eau}} U^2}{\tau}$$

B.2. $P_c = 4 \text{ TW}$

On trouve une valeur double de celle proposée dans le document cité.

B.3. L'accélération du point M est $\vec{a}(t) = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2}$

D'après le schéma : $\overrightarrow{OO'} = \alpha \cos(\omega_H t) \vec{e}_z$.

- α est lié à l'amplitude des vagues.
- ω_H est la pulsation des vagues.

B.4. Avec $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, l'accélération de M est : $\vec{a}(t) = \frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} + \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2}$.

Donc $\vec{a}(t) = \frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} - \alpha \omega_H^2 \cos(\omega_H t) \vec{e}_z$.

Avec $\overrightarrow{O'M} = \ell \vec{e}_r$. Donc $\frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \ell (\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\theta}^2 \vec{e}_r)$

B.5. En notant $\vec{T} - T\vec{e}_r$ la tension du fil, et $\vec{P} = m\vec{g}$ le poids, le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M dans le référentiel terrestre s'écrit : $m\vec{a}(t) = \vec{T} + \vec{P}$.

Donc : $m\ell (\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\theta}^2 \vec{e}_r) - m\alpha \omega_H^2 \cos(\omega_H t) \vec{e}_z = -T\vec{e}_r - mg\vec{e}_z$.

En projetant cette équation sur $\vec{e}_\theta$: $m\ell \ddot{\theta} - m\alpha \omega_H^2 \cos(\omega_H t) \sin \theta = -mg \sin \theta$

Donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \left(1 - \frac{\alpha \omega_H^2}{g} \cos(\omega_H t) \right) \sin \theta(t) = 0$

D'où : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 - \lambda \cos(\omega_H t)) \sin \theta(t) = 0$ avec $\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \\ \lambda = \frac{\alpha \omega_H^2}{g} \end{cases}$

B.6. Dans le cas du pendule simple, l'équation du mouvement est $\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$.

- figure A : L'amplitude des oscillations décroît au cours du temps, $\theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Dans ce cas, le système est un pendule amorti et $f > 0$.
- figure B : L'amplitude des oscillations croît au cours du temps. Dans ce cas, le système est un pendule amplifié et $f < 0$.
- figure C : le mouvement est périodique. Dans ce cas, le système est un pendule libre et $f = 0$.

B.7. L'équation du mouvement est : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 - \lambda \cos(\omega_H t)) \sin \theta(t) = 0$

Pour de petits angles : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 - \lambda \cos(\omega_H t)) \theta(t) = 0$

Cette équation peut être interprétée comme l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique dont la pulsation est $\omega(t) = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda \cos(\omega_H t)}$

B.8. On pose $\nu(t) = \omega_0^2 (1 - \lambda \cos(\omega_H t))$. L'équation du mouvement est alors : $\ddot{\theta} + \nu(t)\theta(t) = 0$

D'après l'énoncé, le système est instable si il existe des dates pour lesquelles $\nu(t) < 0$. Donc si $\lambda > 1$.

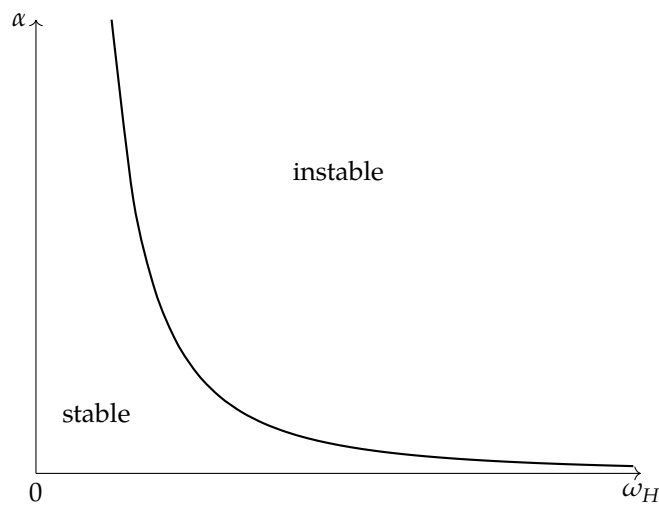
Le système est instable si $\alpha \omega_H^2 > g$.

B.9. Pour les trois premiers portraits de phase ($\lambda = 0,10, \lambda = 0,50, \lambda = 1$), le système est stable d'après la questions précédente. On constate sur les deux premier portraits de phase que $\theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Et $\theta(t)$ est borné dans la situation limite $\lambda = 1$.

- Pour le dernier portrait de phase ($\lambda = 2$), le système est instable d'après la condition précédente. On constate sur le portrait de phase que $\theta(t)$ diverge.

B.10. D'après la question B.8, le système est instable si $\alpha > \frac{g}{\omega_H^2}$.



On note $f_H = 0,50$ Hz et $\omega_H = 2\pi f_H$. La valeur critique de α est $\alpha = \frac{g}{4\pi^2 f_H^2}$. Donc $\alpha = 0,99$ m

C Utilisation de l'énergie marémotrice

C.1. La puissance par unité de surface est $\frac{P_{\text{tot}}}{S_{\text{tot}}} = 11 \text{ W/m}^2$

C.2. Le texte affirme que la puissance d'un ensemble d'éoliennes est la somme de la puissance de chaque éoliennes. Pour des turbines sous-marines, cette relation sera aussi vérifiée si les turbines sont loin les unes des autres. Si elles sont proches, l'écoulement de l'eau en amont de certaines turbines sera plus lent en présence des autres turbines. La puissance totale sera plus faible que la somme des puissances des différentes turbines.

C.3. On note $D = 11$ m le diamètre de la turbine. La surface de celle-ci est alors : $S = \frac{\pi D^2}{4}$. Donc $S = 95 \text{ m}^2$.

Or le débit volumique est $D_m = SU$ où U est la vitesse débitante. Donc $U = \frac{D_m}{S} = \frac{4D_m}{\pi D^2}$. Donc $U = 2,7 \text{ m/s}$.

Cela correspond à une puissance surfacique comprise entre 100 W/m^2 et 200 W/m^2 .

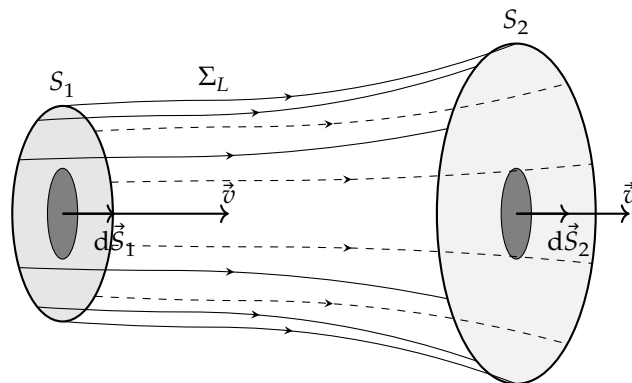
Dans le cas de l'usine de la Rance, la surface utilisée pour le calcul est celle du bassin de rétention et pas celle des turbines. Les deux puissances surfaciques calculées ne sont pas les mêmes, et cela ne présente pas un grand intérêt de les comparer.

C.4. L'équation de conservation de la masse s'écrit : $\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho(M, t)\vec{v}(M, t)) = 0$

Si l'écoulement est incompressible, $\rho(M, t) = \rho_0$ est uniforme et constant. Donc $\begin{cases} \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0 \\ \text{div}(\rho(M, t)\vec{v}(M, t)) = \rho_0 \text{div} \vec{v}(M, t) \end{cases}$

Pour un écoulement incompressible, l'équation de conservation de la masse s'écrit : $\text{div} \vec{v}(M, t) = 0$.

On considère une portion de tube de courant délimitée par les sections S_1 et S_2 . On note $\Sigma = S_1 \cup \Sigma_L \cup S_2$.



Le champ de vitesse étant à flux conservatif : $\oint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$.

Donc, en tenant compte de l'orientation de la surface S_1 : $-\iint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_L} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$

Or, la surface latérale Σ_L est un tube de courant : $\vec{v} \perp d\vec{S}$ et donc : $\iint_{\Sigma_L} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$

Si la vitesse est uniforme sur les deux surfaces S_1 et S_2 , la conservation du bilan est $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

Le débit volumique Sv se conserve le long de l'écoulement.

ρSv est le débit massique du fluide à travers une section de l'écoulement.

C.5. Le débit massique est $\dot{m}(x) = \rho S(x)v(x)$. Or la puissance cinétique est $\dot{E}_c(x) = \frac{1}{2}\dot{m}(x)v^2(x)$.

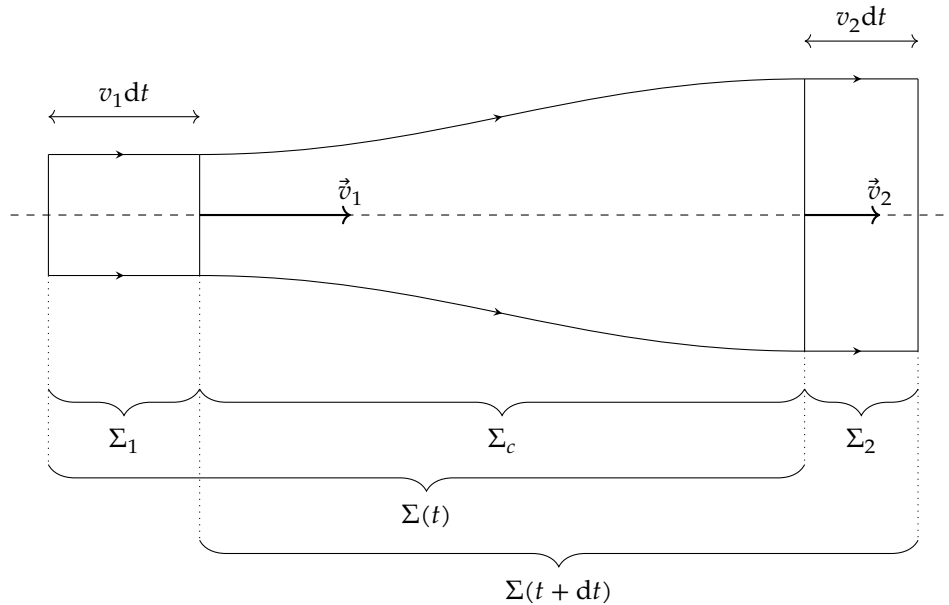
Donc $\dot{E}_c(x) = \frac{1}{2}\rho S(x)v^3(x)$

C.6. Au vu de la formule demandée, ce n'est pas un bilan qui est demandé, mais seulement le calcul de la variation de puissance cinétique : $\Delta\dot{E}_c = \frac{1}{2}\rho S_2 v_2^3 - \frac{1}{2}\rho S_1 v_1^3$.

En utilisant la conservation du débit massique : $S_1 v_1 = S_2 v_2 = S_0 v_0$.

Donc $\Delta\dot{E}_c = \frac{1}{2}\rho S_0 v_0 (v_2^2 - v_1^2)$

C.7. On considère un système fermé $\Sigma(t)$ défini par le schéma ci-dessous : $\begin{cases} \Sigma(t) = \Sigma_1 \cup \Sigma_c \\ \Sigma(t + dt) = \Sigma_2 \cup \Sigma_c \end{cases}$



On note :

- $\vec{p}(t)$: quantité de mouvement du fluide dans $\Sigma(t)$;
- $\vec{p}_c(t)$: quantité de mouvement du fluide dans Σ_c ;
- $d\vec{p}_1$: quantité de mouvement du fluide dans Σ_1 ;
- $d\vec{p}_2$: quantité de mouvement du fluide dans Σ_2 ;
- $\vec{F}$: résultante des forces que le fluide exerce sur l'hélice ;
- $\vec{F}_p$: résultante des forces de pression qui s'exercent sur Σ .

La bilan de quantité de mouvement pour le système fermé Σ s'écrit : $\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = -\vec{F}dt + -\vec{F}_p dt$.

La pression sur la face externe de Σ étant uniforme : $\vec{F}_p = \vec{0}$.

En outre, $\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = [d\vec{p}_2 + \vec{p}_c(t + dt)] - [d\vec{p}_1 + \vec{p}_c(t)]$.

En régime perméant : $\vec{p}_c(t + dt) = \vec{p}_c(t)$, donc $\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = d\vec{p}_2 - d\vec{p}_1$

Or $\begin{cases} d\vec{p}_1 = \rho S_1 v_1 dt \vec{v}_1 \\ d\vec{p}_2 = \rho S_2 v_2 dt \vec{v}_2 \end{cases}$, le bilan devient donc $\rho S_2 v_2 dt \vec{v}_2 - \rho S_1 v_1 dt \vec{v}_1 = -\vec{F}dt$

Donc $\vec{F} = \rho S_1 v_1 \vec{v}_1 - \rho S_2 v_2 \vec{v}_2$.

En utilisant la conservation du débit massique : $S_1 v_1 = S_2 v_2 = S_0 v_0$.

La force exercée par le fluide sur l'hélice est : $\vec{F} = \rho S_0 v_0 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$

En admettant que $P_{\text{hélice}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_0$, $P_{\text{hélice}} = \rho S_0 v_0^2 (v_1 - v_2)$

C.8. En admettant que $\Delta\dot{E}_c = -P_{\text{hélice}}$, on obtient : $\frac{1}{2}\rho S_0 v_0 (v_2^2 - v_1^2) = \rho S_0 v_0^2 (v_2 - v_1)$

Donc $v_0 = \frac{v_2 + v_1}{2}$. La puissance est alors $P_{\text{hélice}} = \frac{1}{4}\rho S_0 (v_1 + v_2)^2 (v_1 - v_2)$

C.9. Avec l'expression précédente de la puissance : $\frac{dP_{\text{hélice}}}{dv_2} = \frac{1}{4}\rho S_0 [2(v_1 + v_2)(v_1 - v_2) - (v_1 + v_2)^2]$

Donc $\frac{dP_{\text{hélice}}}{dv_2} = \frac{1}{4}\rho S_0 [2(v_1^2 - v_2^2) - (v_1 + v_2)^2]$.

La puissance est maximale si $\frac{dP_{\text{hélice}}}{dv_2} = 0$, donc si $2(v_1^2 - v_2^2) = (v_1 + v_2)^2$

Soit $2(v_1 - v_2) = v_1 + v_2$. D'où $v_2 = \frac{v_1}{3}$.

La puissance est maximale si $v_2 = \frac{v_1}{3}$. Dans ce cas $v_0 = \frac{2v_1}{3}$

La puissance maximale est donc : $P_{\text{max}} = \rho S_0 \left(\frac{2v_1}{3}\right)^2 \left(v_1 - \frac{v_1}{3}\right)$

Donc $P_{\text{max}} = \rho S_0 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) v_1^3$. D'où $P_{\text{max}} = \frac{8}{27} \rho S_0 v_1^3$

C.10. La puissance incidente est $P_{\text{inc}} = \frac{1}{2} \rho S_1 v_1^3$

Le rendement est tel que $\eta \leq \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{inc}}}$

Donc $\eta \leq \frac{\frac{8}{27} S_0}{\frac{1}{2} S_1}$

Avec $S_0 = S_1$ (ce qui est en complète contradiction avec tout ce qui a été fait au-dessus) $\eta \leq \frac{16}{27}$.

C.11. L'énoncé ne donne pas de descriptif du dispositif étudié, il faut donc se contenter de donner une liste de raisons banales :

- Tous les éléments qui constituent la chaîne de conversion de puissance (turbine, réducteur, alternateur, transport de l'énergie sur la terre ferme) présentent des pertes énergétiques.
- La vitesse des courants de marées varie au cours du temps ; il est sûrement difficile d'optimiser une turbine pour une large plage de vitesse.
- L'environnement marin favorise la corrosion, le dépôt de vase ou d'algue sur les turbines. Le rendement de celles-ci est donc inférieur à la valeur maximale.
- ...

D Composition de l'eau de mer

D.1. En utilisant les règles de PAULI, KLECHKOWSKY et HUND, les structures électroniques sont : $\begin{cases} \text{Br} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^5 \\ \text{Ca} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 \end{cases}$

D.2. Pour les ions bromure et calcium : $\begin{cases} \text{Br}^- : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 \\ \text{Ca}^{2+} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \end{cases}$

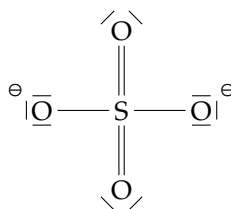
L'ion bromure a la même structure électronique que le krypton, et l'ion calcium a celle de l'argon.

Les ions bromure Br^- et calcium Ca^{2+} sont donc stables.

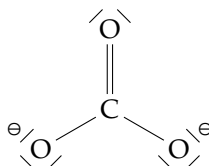
D.3. Le dibrome est, dans les conditions usuelles, un liquide brun.

L'élément brome est un halogène.

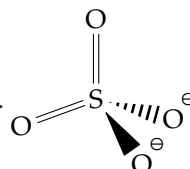
D.4. Une structure de LEWIS pour l'ion sulfate SO_4^{2-} est :



La structure de LEWIS de l'ion carbonate CO_3^{2-} est :



D.5. L'ion sulfate SO_4^{2-} est de type AX_4 , il a donc une structure tétraédrique.



L'ion carbonate CO_3^{2-} est de type AX_3 , il donc plan.

D.6. Le dioxyde de carbone présent dans l'atmosphère passe en solution selon : $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{HCO}_3^- + \text{H}^+$

Et l'équilibre acide-base s'établit : $\text{HCO}_3^- \longrightarrow \text{CO}_3^{2-} + \text{H}^+$

La dissolution du dioxyde de carbone explique la présence des ions hydrogénocarbonate et carbonate.

L'augmentation de la concentration en dioxyde de carbone dans l'atmosphère entraîne une augmentation de la présence de ces deux ions, et donc une acidification de l'eau de mer. Cette augmentation du pH est nuisible pour les coraux et les animaux marins à coquille entre autres.

E Étude d'une batterie à l'eau de mer

E.1. Le potentiel standard d'un couple oxydant/réducteur est le potentiel de d'un système contenant l'oxydant et le réducteur, tous les composants étant dans l'état standard.

La formule de NERST s'écrit : $E = E^0 + \frac{RT}{nF} \ln \prod_i a_i^{\nu_i}$ où :

- i représente chacune des espèces mises en jeu dans la demi-équation rédox (à l'exception des électrons) ;
- E est le potentiel du système étudié ;
- E^0 est le potentiel standard du couple étudié ;
- n est le coefficient stœchiométrique des électrons ;
- a_i est l'activité chimique de l'espèce i ;
- ν_i est le coefficient stœchiométrique de l'espèce i .

Le nombre d'oxydation n'est pas défini pour une espèce chimique mais pour un élément dans un édifice atomique. Si on note x le nombre du manganèse dans les différents corps étudiés.

- Mn : $x = 0$
- Mn^{2+} : $x = \text{II}$
- MnO_2 : $x - 2 \times \text{II} = 0$. Donc $x = \text{IV}$
- MnO_4^- : $x - 4 \times \text{II} = -\text{I}$. Donc $x = \text{VII}$

E.2. L'eau est l'oxydant du couple $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$ pour lequel $E_1^0 = 0 \text{ V}$ par convention.

La demi-équation correspondante est : $\text{H}^+ + \text{e}^- \longrightarrow \frac{1}{2} \text{H}_2$

Le relation de NERNST s'écrit : $E = E_1^0 + \frac{RT}{F} \ln \frac{[\text{H}^+]\sqrt{P^0}}{c_0\sqrt{P_{\text{H}_2}}}$

Soit $E = E_1^0 - \frac{RT}{F \ln 10} \text{pH} - \frac{RT}{2F} \ln \frac{P_{\text{H}_2}}{P^0}$

Sur la frontière qui délimite les domaines d'existence de H_2 et de H_2O : $P_{\text{H}_2} = P^0$

La frontière qui délimite les domaines d'existence de H_2 et de H_2O a pour équation : $E_1 = E_1^0 - \frac{RT}{F \ln 10} \text{pH}$

L'équation de la frontière est $E_1 = E_1^0 - \alpha \text{pH}$ ou $E_1 = -\alpha \text{pH}$

L'eau est le réducteur du couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ pour lequel $E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^0 = 1,23 \text{ V}$.

La demi-équation correspondante est : $\frac{1}{2} \text{O}_2 + 2 \text{e}^- + 2 \text{H}^+ \longrightarrow 2 \text{H}_2\text{O}$

Le relation de NERNST s'écrit : $E = E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^0 + \frac{RT}{2F} \ln \frac{[\text{H}^+]^2 \sqrt{P_{\text{O}_2}}}{c_0^2 \sqrt{P^0}}$

Soit $E = E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^0 - \alpha \text{pH} + \frac{RT}{4F} \ln \frac{P_{\text{O}_2}}{P^0}$

Sur la frontière qui délimite les domaines d'existence de O_2 et de H_2O : $P_{\text{O}_2} = P^0$

Donc, l'équation de cette frontière est : $E_2 = E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^0 - \frac{RT}{F \ln 10} \text{pH}$

L'équation de la frontière est $E_2 = E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^0 - \alpha \text{pH}$

E.3. La demi-équation est $\text{MnO}_4^- + 3 \text{e}^- + 4 \text{H}^+ \longrightarrow \text{MnO}_2 + 2 \text{H}_2\text{O}$

Les équations qui permettent de déterminer la frontière sont, en notant $c_0 = 1 \text{ mol/L}$:

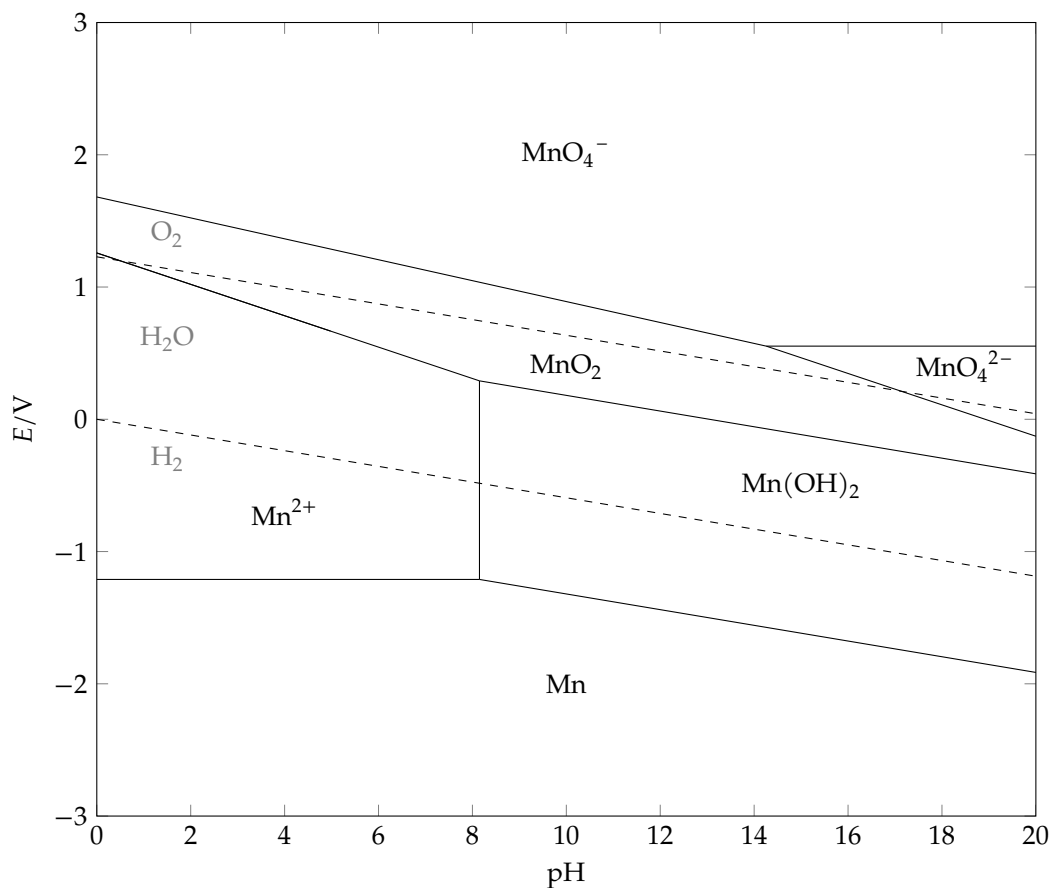
$$\begin{cases} E = E_{\text{MnO}_4^-/\text{MnO}_2}^0 + \frac{RT}{3F} \ln \frac{[\text{MnO}_4^-][\text{H}^+]^4}{c_0^5} & \text{formule de NERNST valable en présence de } \text{MnO}_2 \\ [\text{MnO}_4^-] = C_0 & \text{valable dans le domaine de prédominance de } \text{MnO}_4^- \end{cases}$$

L'équation de la frontière est alors : $E = E_{\text{MnO}_4^-/\text{MnO}_2}^0 + \frac{RT}{3F} \ln \frac{C_0}{c_0} + \frac{4RT}{3F} \ln \frac{[\text{H}^+]}{c_0}$

L'équation de la frontière est $E = E_{\text{MnO}_4^-/\text{MnO}_2}^0 + \frac{\alpha}{3} \log \frac{C_0}{c_0} - \frac{4}{3} \alpha \text{pH}$

L'équation de la frontière est alors $E = (1,57 - 0,05 \text{pH}) \text{ V}$

E.4. Les diagrammes demandés sont :



Le domaine de stabilité de l'oxyde de manganèse MnO_2 et le domaine de stabilité thermodynamique de l'eau ont une partie commune quelque soit le pH de la solution.

L'oxyde de manganèse est toujours stable en présence d'eau.

- E.5.** Les interactions attractives entre les ions de charge opposées sont fortes : la température de fusion du cristal est élevée.
- Les charges sont localisées sur les ions, il n'y a pas de charges mobiles : la conductivité électrique est faible.
 - Dans un solvant comme l'eau dont la permittivité électrique est élevée, la force attractive entre les ions est très faible : les ions passent facilement en solution.

F La pression osmotique

F.1. À l'équilibre, le potentiel chimique du solvant est le même dans les deux compartiments : $\mu_A(p_A, T, x_A) = \mu_B(p_B, T, x_B)$
où x_A et x_B sont les fractions molaires de l'eau dans les deux compartiments.

F.2. Les équations sont :

$$\begin{cases} \mu_A(p_A, T, x_A) = \mu_B(p_B, T, x_B) & \text{condition d'équilibre} \\ \mu_B(p_B, T, x_B) = \mu^*(p_B, T) & \text{eau pure dans le compartiment B} \\ \mu_A(p_A, T, x_A) = \mu^*(p_A, T) + RT \ln x_A & \text{eau salée dans le compartiment A} \\ x_A = 1 - x & \end{cases}$$

La condition d'équilibre est alors : $\mu^*(p_A, T) + RT \ln(1 - x) = \mu^*(p_B, T)$

F.3. En intégrant la relation $\left(\frac{\partial \mu^*}{\partial p}\right)_T = V_m^* : \int_{p_A}^{p_B} \left(\frac{\partial \mu^*}{\partial p}\right)_T dp = V_m^* \int_{p_A}^{p_B} dp$.

Donc $\mu^*(p_B, T) - \mu^*(p_A, T) = V_m^* (p_B - p_A)$

Donc $\mu^*(p_A, T) - \mu^*(p_B, T) = V_m^* \Delta p$

F.4. On note :

- V le volume de la solution étudiée ;
- n_{Na^+} la quantité de matière en sodium dans la solution ;
- n_{Cl^-} la quantité de matière en chlorure dans la solution ;
- $n_{\text{H}_2\text{O}}$ la quantité de matière en eau dans la solution ;
- $\rho = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ la masse volumique de l'eau.

Si on ne tient compte que de l'eau et du chlorure de sodium : $n_{\text{H}_2\text{O}} + n_{\text{Cl}^-} + n_{\text{Na}^+} = n_t$ et donc $\frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_t} + \frac{n_{\text{Cl}^-} + n_{\text{Na}^+}}{n_t} = 1$

Et, pour faire le lien avec les notations précédentes : $x_A = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_t}$ et $x = \frac{n_{\text{Cl}^-} + n_{\text{Na}^+}}{n_t}$.

$$\text{Donc } x = \frac{n_{\text{Cl}^+} + n_{\text{Na}^+}}{n_{\text{H}_2\text{O}} + n_{\text{Cl}^+} + n_{\text{Na}^+}}.$$

$$\text{Pour une solution diluée : } n_t \simeq n_{\text{H}_2\text{O}} \text{ et donc } x = \frac{n_{\text{Cl}^+} + n_{\text{Na}^+}}{n_{\text{H}_2\text{O}}}$$

$$\text{or } \begin{cases} n_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{\rho V}{M_{\text{H}_2\text{O}}} \\ n_{\text{Cl}^-} = n_{\text{Na}^+} = \frac{sV}{M_{\text{NaCl}}} \end{cases}, \text{ donc } x = \frac{2sM_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho M_{\text{NaCl}}}. \text{ Donc } x = 2,2 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Avec la valeur proposée : } \frac{\ln(1-x) + x}{x} = -1,1 \cdot 10^{-4}$$

L'erreur relative commise en assimilant $\ln(1-x)$ et $-x$ sera de $-1,1 \cdot 10^{-4}$.

On peut faire l'approximation $\ln(1-x) \simeq -x$

$$\text{F.5. En utilisant les résultats des questions F.2 et F.3 : } \begin{cases} \mu^*(p_A, T) - \mu^*(p_B, T) = -RT \ln(1-x) \simeq RTx \\ \mu^*(p_A, T) - \mu^*(p_B, T) = V_m^* \Delta p \end{cases}$$

$$\text{Donc } \Delta p = \frac{xRT}{V_m^*}. \text{ Soit } \Delta p = 30 \text{ kPa}.$$

$$\text{En utilisant la loi de la statique des fluides : } h = \frac{\Delta p}{\rho g}. \text{ Soit } h = 3,02 \text{ m}.$$

F.6. Ce dispositif peut être utilisé si l'on dispose d'eau de mer et d'eau douce : le système étudié permet d'augmenter la pression de l'eau de mer. Cette eau sous pression peut alors être dirigée vers une turbine reliée à un alternateur.

Ce dispositif peut être utilisé pour créer de l'énergie électrique.

F.7. En augmentant la pression de l'eau salée, on peut entraîner un transfert du solvant de l'eau de mer vers l'eau douce. On peut ainsi désaliniser de l'eau de mer.