

# Corrigé de l'épreuve de Physique X-ENS 2019

## La dynamique de l'Univers

Corrigé proposé par Sylvain Condamin

### 1 Hubble : l'Univers est en expansion

1. (a) La seconde impulsion doit parcourir une distance supplémentaire  $d = vT$ , elle met donc un temps supplémentaire  $T' - T = \frac{vT}{c}$  à arriver. On a donc  $T' = (1 + v/c)T$ .
- (b) On a  $\lambda' = cT' = \lambda(1 + v/c)$ . Ce résultat est valable pour des vitesses non-relativistes (sans quoi le temps n'est plus le même dans les référentiels des deux particules).
- (c) On a directement  $z = \frac{v}{c}$ .
2. (a) La dimension de  $H_0$  est l'inverse d'un temps.
- (b) On a  $H_0 = \frac{70 \cdot 10^3}{3,09 \cdot 10^{22}} \text{ s}^{-1} = 2,3 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$
3. Si on se place en un point  $\vec{r}'$  de l'Univers, la vitesse dans le référentiel associé à ce point est  $\vec{v}' - \vec{v}$ , et la position  $\vec{r}' - \vec{r}$ . On a bien  $\vec{v}' - \vec{v} = H_0(\vec{r}' - \vec{r})$  : la loi d'expansion est identique vue de  $O'$ .
4. Pour une galaxie,  $\vec{v} = \frac{da}{dt} \vec{\chi}$ . Par ailleurs,  $\vec{v} = H(t) \vec{r} = H(t) a(t) \vec{\chi}$ .  
On obtient donc, à l'aide de ces deux équations,  $H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{da}{dt}$ .

### 2 Évolution du paramètre d'échelle $a(t)$ en cosmologie newtonienne

5. Par analogie avec les équations de Maxwell pour le champ électrostatique, on a :  
 $\text{div } \vec{g} = -4\pi G\rho$  et  $\text{rot } \vec{g} = \vec{0}$ .
6. L'hypothèse de l'annulation à grande distance est en fait inutile ici. Étant donné l'expression de  $\vec{r}' = a(t) \vec{\chi}$ , l'accélération et donc le champ gravitationnel (car  $\vec{a} = \vec{g}$  via le PFD) ne peut être que radial ( $\vec{g} = g\vec{e}_r$ ), où  $g$ , par isotropie, ne dépend que de  $r$ . Le théorème de Gauss gravitationnel, appliqué à une boule de rayon  $r$ , donne donc :  
 $\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$ , soit :  
 $4\pi r^2 g(r) = -4\pi G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ , soit finalement :  
 $g(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho r$ , et donc :  
 $\vec{\ddot{r}} = -\frac{4}{3}\pi G \rho \vec{r}$ , et, en remplaçant  $\vec{r}$  par son expression, et en simplifiant les  $\text{vect}\chi$ ,  
 $\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G \rho a$ .
7. Cette masse reste constante, puisque les galaxies situées à une distance inférieures à  $r(t)$  à  $t = t_0$  le restent par la suite, et inversement. On a donc  $\rho(t) = \frac{M_r}{4/3\pi r^3} = \frac{M_r}{4/3\pi a(t)^3 \chi^3} = \frac{M_r a_0^3}{4/3\pi a(t)^3 r_0^3}$ , soit finalement :  
 $\rho(t) = \rho_0 \frac{a_0^3}{a(t)^3}$ .

8. Il s'agit de trouver une intégrale première du mouvement. On peut multiplier le résultat de la question 6 par  $2\dot{a}$  pour obtenir :

$$2\ddot{a}\dot{a} + \frac{8}{3}\pi G\rho_0 \frac{a_0^3}{a^2} = 0.$$

Il ne reste plus qu'à primitiver pour obtenir le résultat demandé.

Le premier terme de l'équation est analogue à une énergie cinétique, le second à une énergie potentielle, et  $K$  est analogue à une énergie mécanique.

On peut être plus précis : l'énergie cinétique d'une galaxie de masse  $m$  associée à une coordonnée réduite  $\chi$  vaut  $\frac{1}{2}m\chi^2\dot{a}^2$ . Si on multiplie le second terme par la même constante, on obtient :  $-m\frac{4}{3}\pi G\rho_0 \frac{a_0^3\chi^3}{a\chi} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 \frac{r^3}{r} = -\frac{GmM_{int}}{r}$ , où  $M_{int}$  est la masse située à une distance inférieure à  $r$ . Cela peut donc être interprété comme l'énergie potentielle gravitationnelle de la galaxie, si on considère que les couches sont accumulées par  $r$  croissant (les galaxies entre  $r$  et  $r + dr$  arrivant de l'infini subissent alors le champ gravitationnel des galaxies situées à une distance inférieure à  $r$ , ce qui est équivalent au champ gravitationnel créé par une masse  $M_{int}$  ponctuelle).

9. Il suffit pour obtenir cette équation de calculer le paramètre  $K$ , qui est calculable à  $t = 0$ . En effet, à ce temps,  $\dot{a}/a = H_0$  (question 4), et donc  $K = H_0^2 a_0^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a_0^2$ .

On a donc :  $\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0 a_0^3}{a} = a_0^2 (H_0^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0)$  (car  $K$  est constante).

Le résultat demandé s'en déduit en divisant par  $a^2$ .

10. L'équation se simplifie alors en  $\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{a_0^2}{a^2} H_0^2$ .

On en déduit :  $\dot{a}^2 = a_0^2 H_0^2$ , soit  $\dot{a} = a_0 H_0$  (on prend la solution positive, qui est compatible avec la solution à  $t = 0$ ).

On a donc, en exploitant les conditions initiales,  $\boxed{a = a_0(1 + H_0(t - t_0))}$ .

Pour  $t - t_0 = -\frac{1}{H_0}$ , on a alors  $a = 0$ . Cela signifie que l'Univers est alors concentré en un seul point : c'est la singularité du Big Bang, que l'on peut interpréter comme la naissance de l'Univers.

Si on prend  $t' = 0$ , on a alors  $T_0 = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{70.10^{-6}} \text{ pc}^{-1}.\text{an.Mpc} = \frac{1}{70}.10^{12} \text{ ans}$  (en utilisant la correspondance indiquée dans les données).

Soit  $\boxed{T_0 = 1,4.10^{10} \text{ ans}}$

11. L'équation de la question 8 est analogue à l'évolution d'une particule dans un puits de potentiel newtonien 1D, ce qui permet de distinguer états liés et états de diffusion selon le signe de  $K$ . Plus précisément on doit avoir  $K > -\frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0 a_0^3}{a}$ . Or ce dernier terme tend vers 0 en l'infini.  $a(t)$  ne peut donc pas atteindre une valeur infinie si  $K < 0$  : l'expansion finira donc par s'arrêter. Inversement si  $K > 0$ ,  $\dot{a}$  ne peut pas s'annuler : l'expansion ne s'arrêtera donc pas.

On doit donc avoir, pour que l'expansion s'arrête,  $H_0^2 a_0^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a_0^2 < 0$ , soit :

$$\boxed{\rho_0 > \frac{3H_0^2}{8\pi G}}$$

Numériquement :  $\rho_c = \frac{3 \times (2,3)^2 \cdot 10^{-36}}{8\pi \times 6,67 \times 10^{-11}} \text{ kg.m}^{-3} = 1,0.10^{-26} \text{ kg.m}^{-3}$ . Cela donne une moyenne de moins de 10 protons par  $\text{m}^3$ . Cette densité est largement inférieure à la densité du vide interstellaire galactique, mais pas à celle du vide intergalactique, qui occupe la majeure partie de l'Univers. On ne peut donc pas dire simplement si l'Univers dépasse ou non cette densité critique.

12.  $\rho = \rho_c$  donne  $K = 0$ , donc :

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0 a_0^3}{a}.$$

On a donc, après prise de la racine et séparation des variables,  $da\sqrt{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3}}dt$ .

En intégrant, on a :

$$\boxed{\frac{2}{3}(a^{3/2} - a_0^{3/2}) = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3}}(t - t_0)}.$$

Pour trouver l'âge de l'Univers, on prend  $a(t) = 0$  pour  $t = 0$ , ce qui donne :

$$T_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_0}}, \text{ soit, en utilisant } \rho_0 = \rho_c,$$

$$\boxed{T_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} = 9,3 \cdot 10^9 \text{ ans}} \quad (\text{c'est les } 2/3 \text{ du résultat pour un Univers vide...})$$

13. On a alors  $\frac{da}{dt} = a_0 H_0 \frac{dx}{d\tau}$ , et, en remplaçant  $a$ ,  $\dot{a}$ ,  $\rho_0$ , et  $\rho_c$  dans l'équation de Friedmann-Lemaître, on obtient :

$$\frac{H_0^2}{x^2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - H_0^2 \frac{\Omega_0}{x^3} = \frac{H_0^2}{x^2} (1 - \Omega_0), \text{ soit, en simplifiant :}$$

$$\boxed{\left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \frac{\Omega_0}{x} = (1 - \Omega_0)}.$$

14. (a) Un univers ouvert est un univers pour lequel  $K \geq 0$ , soit  $\rho_0 < \rho_c$ , et donc  $\Omega_0 \leq 1$ . Cela correspond à une énergie mécanique positive ou nulle pour un Univers ouvert et négative pour un Univers fermé.
- (b) Après son maximum d'expansion, un Univers fermé se contracte sur lui-même ( $\dot{a}(t)$  change de signe). Le renversement du temps change simplement  $\dot{a}$  en  $-\dot{a}$ , ainsi que  $H_0$  en  $-H_0$ , et donc ne change rien à l'équation de Friedmann-Lemaître. La solution est donc nécessairement symétrique par rapport au temps  $t = t_{max}$  auquel l'expansion est maximale (on a  $\dot{a} = 0$  à ce temps, et, si on prend l'origine des temps à ce moment là, les conditions initiales sont également invariantes par renversement du temps, ce qui a pour conséquence que la solution l'est aussi). On a donc une singularité dans le futur, symétrique de la singularité initiale.
- (c) On a  $\left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = 1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}$ , donc  $\frac{dx}{d\tau}$  décroît avec  $x$  si  $\Omega > 0$  : l'expansion est ralentie.
- (d) On constate sur le graphe que le temps auquel  $x = 0$  (naissance de l'Univers) dépend de  $\Omega_0$ . Plus précisément, plus la densité de l'Univers est élevée, plus l'Univers est jeune. En effet, plus la densité de l'Univers est élevée, plus l'expansion ralentit vite, donc plus elle devait être importante dans le passé.

### 3 De quoi est constitué l'Univers ?

#### 3.1 La matière baryonique et la matière noire

15.  $\Omega_M \sim 0,31 < 1$ , l'Univers est donc ouvert.
16. Le second membre de l'équation (3) vaut  $K/a^2$ , et  $\rho = \rho_0 a_0^3/a^3$ , d'où le résultat.

#### 3.2 Influence de la matière relativiste et du rayonnement sur l'équation de Friedmann-Lemaître

### 4 Thermodynamique de l'Univers

17. On applique le premier principe :  $dU = \delta W = -PdV$  (en supposant que les relations habituelles restent valables à l'échelle cosmologique, ce qui n'a rien d'évident...)

On a  $U = Vu$ , donc  $dU = u dV + V du$ . Or  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  et  $dV = 4\pi r^2 dr$ , on peut donc réécrire :

$$u dr + \frac{r}{3} du = -P dr, \text{ soit, en termes de } a(t) :$$

$$u da + \frac{a}{3} du = -P da.$$

$$\text{Donc } \boxed{\frac{du}{da} = -\frac{3}{a}(u + P)}.$$

18. On peut réécrire :  $\frac{du}{dt} + \frac{3}{a}(u + P)\frac{da}{dt} = 0$ , ce qui, en utilisant  $u = \rho c^2$ , donne le résultat demandé.
19. On a  $\rho(t) = \rho_0 \frac{a_0^3}{a(t)^3}$ , et donc :  
 $\dot{\rho}_M = -3\dot{a}\rho_0 a_0^3 a^{-4}$ , soit :  
 $\boxed{\dot{\rho}_M = -3\rho_M \frac{\dot{a}}{a}}.$
20. On en déduit immédiatement  $\boxed{P_M = 0}.$

## 5 Le rayonnement et la matière noire

21. Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique on a  $U = \frac{3}{2}nRT$  (3 degrés de liberté quadratiques par molécule), soit  $U = \frac{3}{2}PV$ , et donc  $\boxed{P = \frac{2}{3}u}$ . Cette relation est semblable à celle pour des particules relativistes, à un facteur 2 près.
22. On a d'après l'équation de la question 18, en remplaçant  $P$ ,  
 $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \frac{P}{c}) = 0$ , soit :  
 $\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a} = 0$ , d'où :  
 $\frac{d \ln \rho + 4 \ln a}{dt} = 0.$   
 $\rho a^4$  est donc une constante. On peut donc écrire :  
 $\boxed{\rho_{em}(t) = \rho_{em0} \frac{a_0^4}{a(t)^4}}.$
23. En remplaçant  $\rho = \rho_M + \rho_R = \rho_{M0} \frac{a_0^3}{a(t)^3} + \rho_{R0} \frac{a_0^4}{a(t)^4}$  dans l'équation de Friedmann-Lemaître, on obtient :

$$\boxed{\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \rho_{M0} \frac{a_0^3}{a(t)} + \rho_{R0} \frac{a_0^4}{a(t)^2} \right) + K}.$$

24. Le second terme est toujours décroissant avec  $a(t)$ , l'expansion est toujours ralentie (et la conclusion précédente ne change pas quant à la poursuite de l'expansion si  $K > 0$ ).

## 6 L'énergie noire

### 6.1 Mesure du paramètre de décélération

25. (a)  $A_n A_{n+1} = -a(t) d\chi$  (la position comobile de  $A_{n+1}$  dans le référentiel lié à  $A_n$  est  $d\chi$  ; le signe négatif est dû au signe de  $d\chi$ . Ceci dit en dynamique newtonienne l'équation est vraie dans tout référentiel!)
- (b) On a donc  $dt = -\frac{a(t)}{c} d\chi$ .
- (c) En intégrant  $d\chi$  de 0 à  $\chi_A$ , on obtient :  
 $\int_0^{\chi_A} d\chi = -\int_{t_2}^{t_1} \frac{c}{a(t)} dt$ , ce qui donne l'équation demandée après inversion des bornes de la deuxième intégrale.
26. (a) On a  $\chi_A = c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)}$  et  $\chi_A = c \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} \frac{dt}{a(t)}$ .  
En faisant la différence de ces deux expressions il vient :  
 $0 = c \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{a(t)} - c \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} \frac{dt}{a(t)}.$

Comme les intervalles de temps sont très courts  $a(t)$  peut être identifié à  $a(t_1)$  et  $a(t_2)$  respectivement, ce qui donne :

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} - \frac{\delta t_2}{a(t_2)} = 0$$

Soit  $\boxed{\frac{\delta t_2}{a(t_2)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}}$ .

- (b) Si on prend  $\delta t_1 = T = \lambda/c$ , on a  $\delta t_2 = T' = \lambda'/c$ .

On en déduit  $\boxed{\lambda' = \frac{a(t_2)}{a(t_1)}\lambda}$ .

- (c) Cf. question précédente.

- (d)  $\frac{E'}{E} = \frac{h\nu'}{h\nu} = \frac{\lambda}{\lambda'}$  soit

$$\boxed{\frac{E'}{E} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}}.$$

- (e) En supposant que les photons n'interagissent pas avec la matière, leur densité est multipliée, comme celle de la matière, par  $\frac{a_0^3}{a(t)^3}$  suite à l'expansion de l'Univers, et leur énergie est multipliée par  $\frac{a_0}{a(t)}$  ( $a_0$  est ici associée au temps d'émission d'où l'inversion des notations par rapport à la question précédente).

La densité d'énergie est donc multipliée par  $\frac{a_0^4}{a(t)^4}$  : on retrouve le résultat de la question précédente.

- (f) On a  $z = \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 = \frac{a_0}{a(t_1)} - 1$  ( $t_2$  correspond au temps actuel), d'où le résultat.

27. (a)  $\boxed{L = \frac{N\bar{E}}{\delta t_1}}$  (c'est une puissance).

- (b)  $\boxed{p_s = \frac{N\bar{E}'}{\delta t_2 4\pi R^2}}$  (énergie sur la sphère de rayon  $R$ , divisée par le temps de réception, et la surface).

On en déduit  $p_s = \frac{N\bar{E}a(t_1)}{a(t_2)\delta t_2 4\pi a(t_2)^2 \chi_A^2} = \frac{L\delta t_1 a(t_1)}{a(t_2)^3 \delta t_2 4\pi \chi_A^2}$  soit :

$$\boxed{p_s = \frac{La(t_1)^2}{a(t_2)^4 4\pi \chi_A^2}}$$

- (c) Si on connaît  $p_s$  et  $L$  on en déduit aisément  $d_L$ . On a  $d_L = \frac{\chi_A a_0^2}{a(t_1)}$ , soit :

$$\boxed{d_L = \chi_A a_0 (1+z)}.$$

On peut donc déduire de  $d_L$  et de  $z$  la valeur de  $\chi_A a_0$  (distance actuelle), et, via la connaissance de  $z$ , de  $a(t_1)/a_0$ , donc de  $\chi_A a(t_1)$  (distance à l'instant  $t_1$ ).

## 6.2 La constante cosmologique et l'énergie noire

28. (a) On a  $\left[\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right] = T^{-2}$ , donc  $[\Lambda] = T^{-2}[c]^{-2} = L^{-2}$ . C'est donc l'inverse d'une surface.

- (b) On peut écrire :  $\frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda$ . Cela donne :

$$\boxed{\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}}.$$

- (c) On a  $\boxed{u_\Lambda = \rho_\Lambda c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}}$ .

29. (a)  $u_\Lambda$  est une constante, donc l'énergie noire ne se dilue pas lors de l'expansion de l'Univers.

- (b) On réécrit l'équation de Friedmann-Lemaître :

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2 \Omega + \frac{K}{a^2}, \text{ soit :}$$

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left( \Omega_\Lambda a^2 + \frac{\Omega_M a_0^3}{a} + \frac{\Omega_R a_0^4}{a^2} \right) + K. \text{ (les densités réduites citées sont les densités réduites à l'instant présent).}$$

D'où, en dérivant :

$$2\dot{a}\ddot{a} = H_0^2 \left( 2\Omega_\Lambda \dot{a}a - \frac{\Omega_M a_0^3 \dot{a}}{a^2} - 2\frac{\Omega_R a_0^4 \dot{a}}{a^3} \right).$$

En simplifiant, on obtient, lorsque  $a = a_0$ ,

$$\ddot{a}_0 = H_0^2 \left( \Omega_\Lambda - \frac{\Omega_M}{2} - \Omega_R \right) a_0.$$

Pour avoir une expansion accélérée, il faut donc :

$$\boxed{\left( \Omega_\Lambda > \frac{\Omega_M}{2} + \Omega_R \right)}.$$

On a donc a fortiori  $\Lambda > 0$ .

- (c) En utilisant l'équation de la question 18, on obtient, pour la densité du vide,

$$3\frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0, \text{ soit :}$$

$$\boxed{P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 = -u_\Lambda}. \text{ Cette pression est donc négative.}$$

- (d) L'interaction est répulsive, car la contribution de l'énergie noire dans  $\ddot{a}_0$  (le terme  $H_0^2 \Omega_\Lambda a_0$ ) est positive.