

Deux problèmes indépendants

Problème n° 1 – Étude d'un phénomène de reptation thermique

1 Conditions d'équilibre d'un solide sur un plan incliné

1. Le contact ne se produit qu'au niveau des points A et B . À l'équilibre, on écrit que le centre d'inertie ne possède pas d'accélération et, par conséquent, que la somme des forces est nulle : $m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{T}_A + \vec{N}_B + \vec{T}_B = \vec{0}$. On projette sur les deux axes Ox et Oz et on obtient $N_A + N_B = mg \cos \theta$ et $T_A + T_B = mg \sin \theta$. Il faut aussi écrire qu'il n'y a pas de rotation autour du centre d'inertie. La somme des moments des forces calculée en G donne $-(T_A + T_B)a - N_B b + N_A b = 0$ en tenant compte du sens positif de rotation défini par l'orientation de l'angle θ . Cette dernière équation permet d'écrire que $N_A - N_B = q(T_A + T_B)$. En sommant les deux équations concernant les composantes normales de contact, on arrive à $2N_A = mg(\cos \theta + q \sin \theta)$. On en déduit les expressions attendues : $N_A = \frac{mg}{2}(\cos \theta + q \sin \theta)$, puis $N_B = \frac{mg}{2}(\cos \theta - q \sin \theta)$. Nous constatons comme l'énoncé l'indique qu'il y a 4 inconnues dynamiques correspondant aux 4 composantes des forces de contact et seulement trois équations.

2. Il n'y a pas de glissement si $T_A < fN_A$ et $T_B < fN_B$. En sommant, on obtient $T_A + T_B < f(N_A + N_B)$ d'où la relation $mg \sin \theta < fmg \cos \theta$. On a donc $\tan \theta < f$. Le contact en A existe quelle que soit la valeur de l'angle $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, par contre N_B peut s'annuler traduisant la perte du contact. Pour éviter, il faut que $\cos \theta > q \sin \theta$. On obtient bien alors la condition $\tan \theta < \frac{1}{q}$. Si on suppose que $f < \frac{1}{q}$ alors on obtient $\tan \theta < f < \frac{1}{q}$ ce qui donne automatiquement $\tan \theta < \frac{1}{q}$. L'équilibre est donc tout à fait possible dans le cadre de ces conditions.

3. On pose $T_A = N_A Z_A$ et $T_B = N_B Z_B$. On remplace dans l'expression donnant la somme des composantes tangentielles et on obtient, après simplification par mg , la relation $Z_A(\cos \theta + q \sin \theta) + Z_B(\cos \theta - q \sin \theta) = 2 \sin \theta$. On divise par $\cos \theta$ et on obtient $Z_A(1 + q \tan \theta) + Z_B(1 - q \tan \theta) = 2 \tan \theta$. Cela permet d'identifier avec les coefficients de l'énoncé $A = 1 + q \tan \theta$ et $B = 1 - q \tan \theta$. $A > 0$ est évident puisque $\tan \theta > 0$ et comme $q \tan \theta < 1$, on en déduit aussi que $B > 0$.

4. Si $\tan \theta = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{4}$, on est dans les conditions d'obtention d'un équilibre que nous avons évoquées avant. L'équation devient $Z_A \frac{9}{8} + Z_B \frac{7}{8} = 1$. On obtient l'équation de la droite dans le plan proposé : $Z_B = \frac{8}{7} - \frac{9}{7}Z_A$. La droite est représentée à la figure 1. On note que $Z_A \geq 0$ et $Z_B \geq 0$. Sur le graphique proposé, on ne présente que le premier quadrant.

5. Les états d'adhérence sont limités par la valeur du coefficient de frottement f puisqu'au moment du glissement, on a $T_A = fN_A$, c'est-à-dire $Z_A = f$. Il en va bien sûr de même pour Z_B . Les états d'adhérence sont donc nécessairement contenus dans un carré de côté f . Sur le graphique de la figure 1, on peut donc voir les limites du carré avec $f = 1$. Le domaine des états d'adhérence est celui pour lequel les adhérences sont positives et contenues dans le carré de côté f . Les limites de ce domaine sont marquées par des flèches sur le graphique, cela représente un segment noté $\mathcal{D}$ par l'énoncé.

6. L'indétermination sur T_A et T_B qui se traduit par une indétermination sur Z_A et Z_B est perceptible par l'existence d'un domaine étendu pour les adhérences. Si les composantes tangentielles étaient fixées, on aurait un point pour représenter leurs valeurs et non pas un segment.

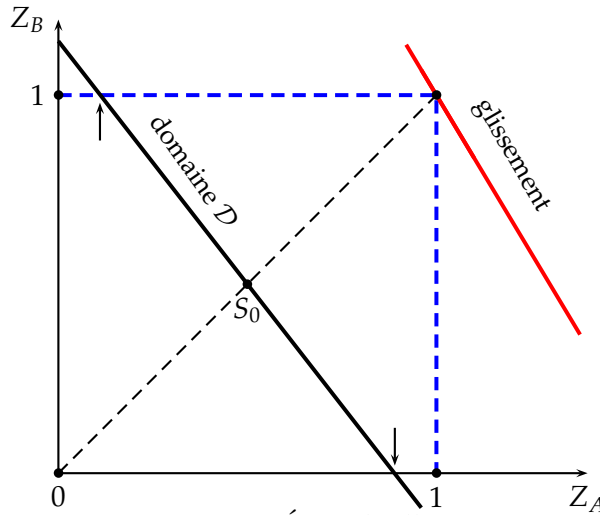


FIGURE 1 – États d'adhérence

7. L'équation générale de la droite est $Z_B = \frac{2 \tan \theta}{1 - q \tan \theta} - \frac{1 + q \tan \theta}{1 - q \tan \theta} Z_A$. S'il y a glissement, on a alors $\tan \theta = f$, l'équation devient alors $Z_B = \frac{2f}{1 - qf} - \frac{1 + qf}{1 - qf} Z_A$. Avec les valeurs numériques proposées, on a $Z_B = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} Z_A$. Cette droite passe par le point $Z_A = 1$ et $Z_B = 1$ comme on peut le voir sur le graphique de la figure 1.

2 Reptation thermique

8. On a $Z_A = Z_B$, l'équation reliant les deux adhérences devient $Z_A(1 - q \tan \theta) = 2 \tan \theta - (1 + q \tan \theta) Z_A$. Cette relation permet de voir rapidement que l'on obtient $Z_A = Z_B = \tan \theta$. Sur le graphique de la figure 1, cela correspond au point S_0 de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ puisque l'on a $\tan \theta = \frac{1}{2}$. Le point correspondant à la situation initiale est situé sur la première diagonale.

9. L'énoncé indique qu'il ne faut pas prendre en compte l'effet de T sur q . L'équation de la droite $Z_B = \frac{2 \tan \theta}{1 - q \tan \theta} - \frac{1 + q \tan \theta}{1 - q \tan \theta} Z_A$ est donc inchangée. Il faut donc en déduire que si déplacement de S il y a, il doit forcément se produire en restant sur le segment du domaine $\mathcal{D}$. Pour deviner comment s'effectue ce déplacement, on peut comprendre à la lecture de l'énoncé (à la question suivante...) qu'il faut envisager un glissement en A se produisant avec B fixé et un glissement en B à A fixé à son tour. Ceci s'effectue sous l'effet du phénomène de dilatation. Il est très difficile de prévoir l'évolution du coefficient de frottement f avec la température car pour deux mêmes matériaux en contact, on peut tout avoir à savoir une diminution de f mais aussi une augmentation. Il faut quand même reconnaître que la situation la plus courante sera une diminution de f lorsque la température augmente. Ici, apparemment, il faut raisonner en considérant f stable sous l'effet de T . Par contre, on peut prévoir une dilatation de l'objet posé sur le plan. Avec l'orientation du plan incliné et l'effet du poids, il n'est guère envisageable d'avoir une reptation vers le haut. De plus, l'énoncé nous dit que cela descend. Il n'est pas possible d'envisager une dilatation qui fait monter B parce que l'effet serait de remonter le plan incliné. Il faut que la dilatation provoque le déplacement de A (sans faire bouger B ...). Théoriquement pour obtenir le glissement, il faut que l'adhérence arrive à f . Z_A doit donc augmenter pour atteindre f . Or, si l'on regarde le graphique de la figure 1, le point le plus élevé de Z_A dans le domaine $\mathcal{D}$ n'atteint pas la valeur f . Il faut donc supposer que f diminue un peu pour que le glissement en A se produise et qu'on atteigne le glissement avant que $Z_B = 0$. Pour le refroidissement et la contraction du solide, on doit faire remonter le point S sur le domaine $\mathcal{D}$. Quand le point S atteint le plus haut point de $\mathcal{D}$, il y a glissement en B vers le bas par l'effet de contraction. Il y a donc eu globalement, une descente du centre d'inertie de l'objet dans un mouvement saccadé.

10. Nous avons décrit ce qu'il se passait pour les points A et B dans la question précédente, on peut en déduire les graphiques demandés, voir la figure 2.

11. On adopte $q = 0$ comme modèle de la situation d'un objet de très faible épaisseur par rapport à ses deux autres dimensions, l'énoncé cite l'exemple d'une ardoise sur un toit. La relation entre les deux adhérences devient $Z_A + Z_B = 2 \tan \theta$. On a aussi égalité des composantes normales $N_A = N_B = \frac{mg}{2} \cos \theta$. On écrit la relation de la Dynamique pour le patin A dont on va négliger l'inertie ($m_p = 0$), on projette

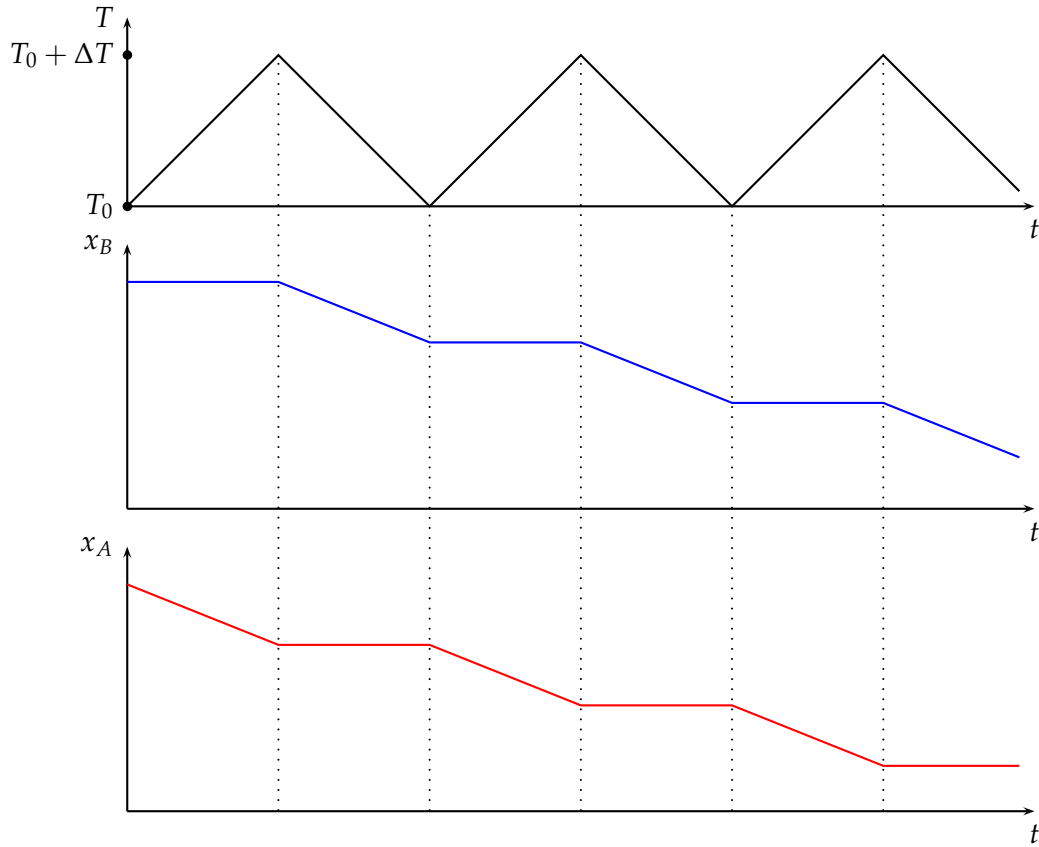


FIGURE 2 – Déplacements des points A et B lors de la reptation thermique

donc la somme des forces sur l'axe Ox . On obtient $T_A - 2ku_A = m_p a_{xp} = 0$ puisqu'il y a deux ressorts qui exercent la même force sur le patin. On en déduit que $T_A = 2ku_A$. Or, $Z_A = \frac{T_A}{N_A} = \frac{2ku_A}{\frac{mg}{2} \cos \theta}$. On obtient facilement $\boxed{Z_A = \frac{4k}{mg \cos \theta} u_A}$. La relation est exactement la même pour B : $Z_B = \frac{4k}{mg \cos \theta} u_B$.

12. Sous l'effet de l'évolution de la température, la longueur de l'objet $2b$ va changer. C'est elle qui est responsable des évolutions de u_A et de u_B . En regardant le schéma, on peut voir que si l'objet se dilate alors le point A a tendance à se décaler à droite ce qui revient à faire augmenter u_A . Si $T > T^*$, on aura alors $u_A > u_A^*$. Pour le point B c'est le contraire si l'on peut dire. En effet, si l'objet se dilate alors le point B se décale vers le haut ce qui va réduire u_B . On aura alors $u_B < u_B^*$. La différence $u_A - u_B$ va donc augmenter, toujours dans l'hypothèse $T > T^*$, on aura $u_A - u_B > u_A^* - u_B^*$. Cette augmentation ne peut qu'être une conséquence de la dilatation de la longueur $2b(T^*)$ par rapport à ce qu'elle va devenir $2b(T)$. On a donc $u_A - u_B = (u_A^* - u_B^*) + 2b(T^*)\alpha(T - T^*)$. On passe facilement à l'évolution de l'écart des adhérences lorsque $T^* = T_0$ et la distance $2b(T^*) = 2b(T_0) = 2b_0$: $\boxed{Z_A(T) - Z_B(T) = \Delta Z^* + \alpha \frac{8kb_0}{mg \cos \theta} (T - T_0)}$. On comprend l'intérêt de la notation β proposée par l'énoncé.

13. N'oublions pas que $q = 0$ et que l'équation des lieux d'adhérence est $Z_B = 2 \tan \theta - Z_A$. Sur le graphique de la figure 3, cela correspond à la droite $Z_B = 2 \tan \theta - Z_A = 1 - Z_A$ avec toujours les mêmes valeurs fournies par l'énoncé. On part toujours de l'état initial matérialisé par S_0 : $Z_A^* = Z_B^* = \tan \theta$ et donc $\Delta Z^* = 0$. On augmente la température, on va avoir $Z_A - Z_B = \alpha \beta (T - T_0)$. Les deux équations que l'on possède sont donc $Z_A + Z_B = 2 \tan \theta$ et $Z_A - Z_B = \alpha \beta (T - T_0)$. On peut déterminer sans équivoque les adhérences : $\boxed{Z_A = \tan \theta + \frac{\alpha \beta}{2} (T - T_0)}$ et $\boxed{Z_B = \tan \theta - \frac{\alpha \beta}{2} (T - T_0)}$. Lorsque la température augmente, on part de S_0 pour descendre le domaine D des équilibres. On voit bien comment la température est le paramètre de la valeur des adhérences. On voit sur ce modèle que l'augmentation de T va provoquer d'abord le glissement en A puisque Z_A augmente et que Z_B diminue. C'est $Z_A = f$ qui va fixer la condition pour obtenir du glissement.

14. Comme nous l'avons vu, on a glissement - toujours en élevant la température - si $Z_A = f$. Avec

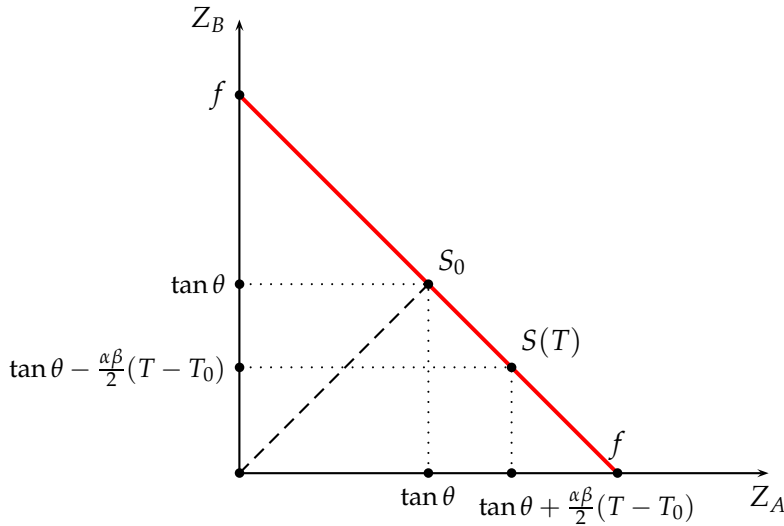


FIGURE 3 – Évolution des états d'adhérence lors de l'évolution de la température de T_0 à $T > T_0$

l'expression de Z_A , on trouve que la variation de la température doit vérifier $f = \tan \theta + \frac{\alpha\beta}{2}(T_A - T)$. Au contraire si l'on diminue la température pour avoir $T_B < T_0$, il y aura glissement en B si on a la relation $f = \tan \theta - \frac{\alpha\beta}{2}(T_B - T_0)$. En sommant les deux équations, on obtient $2f = 2 \tan \theta + \frac{\alpha\beta}{2}(T_A - T_B)$. L'amplitude de température minimale qui permet d'obtenir le phénomène de reptation est donc : $\Delta T = \frac{4(f - \tan \theta)}{\alpha\beta}$.

15. On peut voir que le phénomène de reptation nécessite un écart de température d'autant plus élevé que le coefficient de frottement est élevé, mais ce qui est décisif est l'écart à la condition de glissement $f - \tan \theta$. Plus on est loin du glissement, plus il faudra de dilatation et donc une température plus élevée par rapport à T_0 . On peut aussi voir que plus α est élevé, moins il faudra monter en température pour obtenir le phénomène.

16. Au cours d'une montée de température de ΔT suivie d'une baisse de ΔT , on provoque un déplacement global du centre d'inertie du système de $2b_0\alpha\Delta T$ car au départ lors de la montée de température, c'est le point A qui descend de $2b_0\alpha\Delta T$. Ensuite, c'est B qui va descendre lors de la baisse de température de ΔT . Par conséquent, lorsque le cycle est terminé, les deux points sont descendus de la même quantité. On a donc $\Delta x_{1 \text{ cycle}} = -2b_0\alpha\Delta T$. On trouve numériquement que, toujours sur un cycle, l'objet descend de $10^{-1} \times 5 \times 10^{-5} = 5 \mu\text{m}$. Pour atteindre une valeur de 1 mm de descente, cela représente 200 cycles. Il faut donc 200×5 minutes. On trouve 16 heures 40 minutes.

3 Modèle microscopique du contact entre deux solides

17. Pour un pneu sur une route sèche, on peut proposer $0,5 \leq f \leq 1,0$. Pour un contact bois sur bois, il est raisonnable de proposer $0,2 \leq f \leq 0,4$. Enfin, on peut proposer un contact acier sur acier avec un coefficient plus faible que les précédents $0 \leq f \leq 0,1$.

18. Les forces sur les faces sont normales à chacune d'elles car on suppose localement l'absence de frottement. Comme le solide est tiré sur la droite, la force exercée par le support côté droit sera plus importante que celle exercée par le côté gauche. Ceci est indispensable pour que la résultante horizontale soit orientée à gauche de telle sorte que $R_{Gx} - R_{Dx} + F = 0$. On aura $R_{Dx} = R_{Gx} + F$. En projetant avec l'angle γ , on obtient $(R_D + R_G) \cos \gamma = N$ et $F + R_G \sin \gamma = R_D \sin \gamma$. Cela permet d'exprimer chaque réaction :

$R_D = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{\cos \gamma} + \frac{F}{\sin \gamma} \right)$ et $R_G = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{\cos \gamma} - \frac{F}{\sin \gamma} \right)$. Le schéma des forces est représenté à la figure 4 en prenant un angle $\gamma \simeq 30^\circ$ comme le schéma de l'énoncé nous y invite. Sur ce schéma, on a représenté la résultante de toutes les forces normales sur tous les motifs. Si l'on voulait représenter seulement la force sur un motif, il faudrait diviser par le nombre de motifs, sur le schéma de l'énoncé, cela correspondrait à 3 motifs.

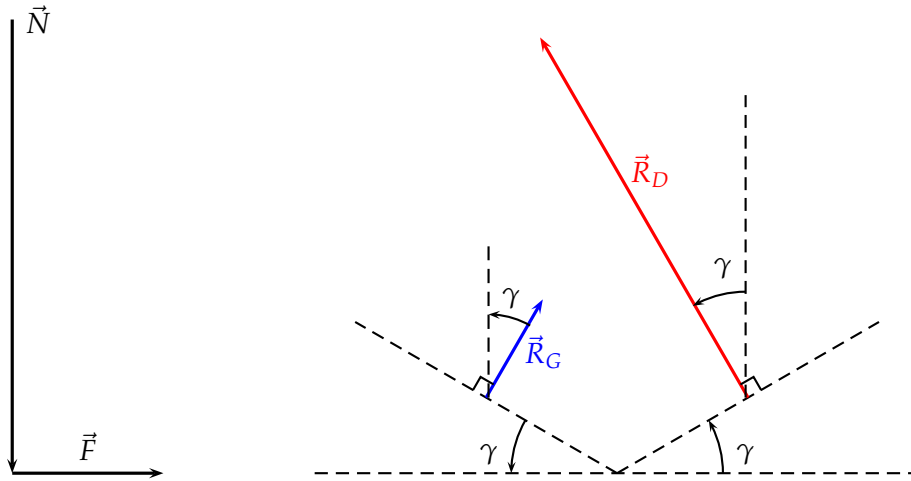


FIGURE 4 – Diagramme des forces de la denture sur le solide

19. À la limite du glissement, on aura une force exercée $-\vec{F}$ par le support sur l'objet de notre étude, c'est-à-dire exercée par (0) sur (1) mais aussi une force $-\vec{N}$. Si regarde seulement l'ensemble, on se trouve avec une force normale de norme N et une force tangentielle de norme F . On peut définir le coefficient de frottement comme $f = \frac{F}{N}$.

20. Le graphique commence en $x = \frac{d}{2}$, on augmente la force F et rien ne bouge avec des frottements, le module de la force augmente alors jusqu'à atteindre la limite du glissement à la valeur fN . Lorsque le glissement commence, l'objet se décale vers la droite en montant sur les facettes de droite (D). Aussitôt le contact est perdu pour les facettes situées à gauche, on a alors $R_G = 0$. On peut en déduire que la force minimale nécessaire est alors telle que $R_G = \frac{1}{2}(\frac{N}{\cos \gamma} - \frac{F}{\sin \gamma}) = 0$. On en déduit que cela est possible pour $F = N \tan \gamma$. Cette expression reste valable tant que le solide est en contact avec les facettes droites. À un moment donné, le point bas de la denture du solide se retrouve au sommet d'une denture du support (0). L'abscisse qui repère la position du solide est alors $x = d$. À ce moment-là, le contact cesse avec les facettes droites pour se produire sur les facettes gauches. Le solide va glisser tout seul pour se mettre dans le creux de la denture suivante sous l'effet du bilan de force $\vec{N} + \vec{R}_G$. Comme on procède avec une ficelle, la ficelle perd aussitôt sa tension, on a $F = 0$ jusqu'à ce que le contact soit de nouveau réalisé sur les deux types de facettes. L'abscisse du solide (1) est $x = \frac{3d}{2}$. Et ainsi de suite pour franchir une denture supplémentaire. Le graphique de la force exercée par la ficelle est représenté à la figure 5.

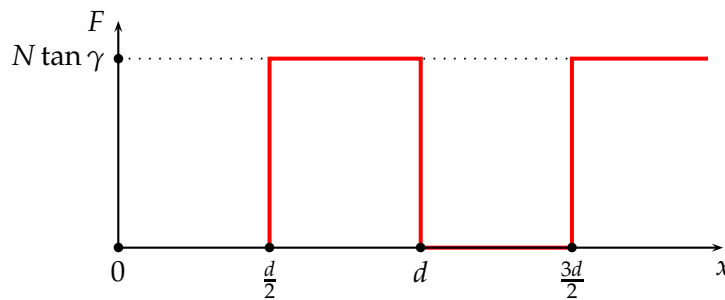


FIGURE 5 – Force exercée par l'opérateur pour déplacer le solide (1) sur le support (0)

21. L'opérateur qui tire la ficelle agit avec une force constante F pendant la montée des facettes gauches. Le point d'application de la force se déplace de $\frac{d}{2}$ pour arriver au-dessus des facettes. Comme nous l'avons dit, lors de la descente la ficelle est détendue et $F = 0$. L'opérateur exerce donc un travail $W_{op} = F \frac{d}{2}$ pour arriver à faire progresser le solide (1) d'un motif. D'après les indications de l'énoncé, on voit que $\tan \gamma = \frac{2h}{d}$. Comme pendant la montée des facettes gauches, on a $F = N \tan \gamma$, on en déduit que $W_{op} = N \tan \gamma \frac{d}{2}$. Avec l'expression de γ , on arrive à $W_{op} = Nh$. Ce résultat correspond à l'opposé du travail de la force verticale

$\vec{N}$ qui se produit lorsque le solide monte d'une hauteur h lors du passage par le sommet de la denture. Ce résultat est logique.

22. Entre les deux situations envisagées, le système ne gagne pas d'énergie cinétique, il n'en perd pas non plus. Il ne perd ni ne gagne non plus d'énergie potentielle. Or, le travail de l'opérateur lui a transmis de l'énergie sous forme de travail. Cette énergie a été convertie en énergie interne, c'est en ce sens que l'on parle de dissipation. On est passé d'une énergie noble à savoir un travail à une énergie interne moins noble car beaucoup plus difficile à mobiliser pour en tirer une action intéressante sur le plan mécanique. Toute l'énergie correspondant au travail de l'opérateur n'est pas la propriété du système (1). Le support (0) va aussi en recevoir une partie. Toute la zone de contact va **s'échauffer**, c'est la traduction au niveau macroscopique de cette dissipation d'énergie.

23. D'après l'énoncé, on doit avoir $N = \sigma_s S'$. La surface réelle de contact entre les deux solides S' est donc bien indépendante de sa surface apparente S .

24. Avec un objet sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale, comme cela a été étudié au début du sujet, on a un équilibre si les forces attractives décrites dans l'énoncé compense la composante du poids selon la ligne de plus grande pente à savoir $mg \sin \theta$. Si l'on augmente l'angle θ , la force attractive doit augmenter pour maintenir (1) à l'équilibre. À un moment donné, elle atteint son maximum et, c'est alors que si $mg \sin \theta$ devient trop grande, l'ensemble des forces attractives sont insuffisantes : le solide se met à glisser sur le plan incliné $F_{\text{attractives}} < mg \sin \theta$.

25. On raisonne pour une valeur de N fixée. Plus σ_s est grande plus la surface $S' = \frac{N}{\sigma_s}$ est petite. Il y aura donc moins d'atomes en interaction attractive entre le système et le support. On atteindra plus vite la condition de glissement. Cela veut dire que **f diminue lorsque σ_s augmente**.

26. Lorsque l'on tire sur le bloc avec la force $\vec{F}$, nous avons vu qu'il glissait sur les facettes droites tout en montant et que le contact n'était plus réalisé avec les facettes gauches. Si on relâche la force $\vec{F}$, avant que les pointes des deux dentures soient en face l'une de l'autre, on a une force de rappel qui ramène le solide (1) dans sa position initiale au fond du creux qu'il occupait. Le problème de ce modèle, c'est que la force de rappel est constante puisqu'elle vaut $N \tan \gamma$. Pour réaliser une force de rappel de type ressort, on peut tenter¹ d'imaginer un profil différent de celui proposé. Proposons un profil parabolique, comme indiqué sur la figure 6, formé d'arches de paraboles de longueur d . Sur la figure, on a représenté une demi-arche seulement. Le creux de la denture n'a plus la forme d'un V mais celle d'une parabole. On place l'origine O du repère au creux de la parabole d'équation $z = ax^2$. Le point de coordonnées $(d/2, h)$ correspond au sommet, au pic de la surface de contact. On a donc $h = a \frac{d^2}{4}$. L'équation de la parabole est donc $z = 4h \left(\frac{x}{d}\right)^2$. On peut donc écrire que l'on a $F = N \tan \gamma(x)$. Or, $\tan \gamma(x) = \frac{2z(x)}{x} = \frac{8hx}{d^2}$. La force $\vec{F}$ censée contrer la force de rappel a donc pour expression $F = \frac{8Nh}{d^2}x$. Dans le modèle proposé, il y a 2 ressorts au niveau de chaque contact que l'on modélise ici et qui ont, tous les deux, la même action. On peut donc écrire $F = 2kx$. On peut proposer une constante de raideur $k = \frac{4Nh}{d^2}$. Comme on travaille avec une force N qui représente le poids du corps (toujours avec l'effet de projection), on peut en déduire l'expression : $\beta = \frac{16Nhb_0}{d^2 mg \cos \theta}$. En se plaçant à la limite du glissement, on a $f = \frac{F}{N}$. Avec l'expression de $F(x)$, on constate que le coefficient de frottement est fonction de x : $f = \tan \gamma(x) = \frac{8hx}{d^2}$. On calculera le coefficient de frottement moyen $\bar{f} = \frac{2}{d} \int_0^{d/2} \frac{8h}{d^2} x dx$. On trouve facilement que **$\bar{f} = \frac{2h}{d}$** . Ce résultat est logique dans la mesure où on a adapté le modèle parabolique à celui d'une pente constante telle que $\tan \gamma = \frac{2h}{d}$ dans le modèle initial de la denture.

1. C'est relativement aventureux mais l'énoncé laisse l'initiative...

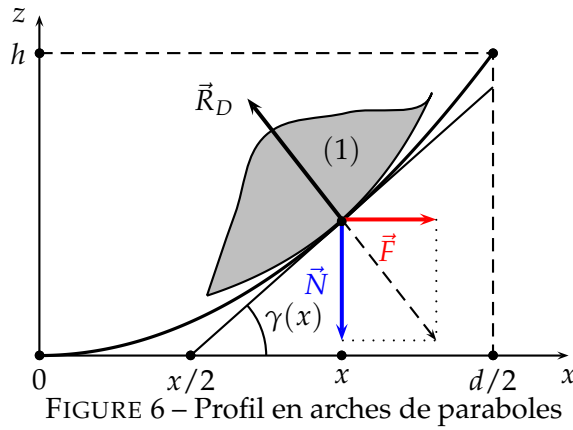


FIGURE 6 – Profil en arches de paraboles

Problème n° 2 – Étude de l'interaction entre le pantographe d'un train et le système caténaire

1 Étude de la déformée statique du câble porteur

1. Le poids du câble est $mg = L \frac{\pi}{4} D^2 \rho g$. Ce poids est compensé par les N suspentes qui exercent toutes la même force F . On a donc $NF = L \frac{\pi}{4} D^2 \rho g$. Comme la longueur $L = (N + 1)d$, on en déduit que :

$$F = \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{\pi D^2}{4} \rho g. \text{ Avec les valeurs fournies, on trouve } d = 5 \text{ m et ensuite } F \simeq 350 \text{ N.}$$

2. Il y a équilibre du système composé par les deux portions de câble situé autour de S_i : $\vec{T}_{i+1} - \vec{T}_i + \vec{F} = \vec{0}$. On projette sur un axe horizontal, perpendiculaire à $\vec{F}$. On obtient alors $T_{i+1} \cos \theta_{i+1} - T_i \cos \theta_i = 0$. La projection sur la verticale conduit à $T_{i+1} \sin \theta_{i+1} - F - T_i \sin \theta_i = 0$. On peut encore écrire ces équations sous la forme : $T_{i+1} \cos \theta_{i+1} = T_i \cos \theta_i$ et $T_{i+1} \sin \theta_{i+1} = F + T_i \sin \theta_i$.

3. On se place dans le cas des petits angles, on peut donc écrire $\sin \theta_i \simeq \theta_i$ et $\cos \theta_i \simeq 1$ en ne conservant que les termes du premier ordre. On en déduit donc que $T_{i+1} = T_i$. Cela revient à assimiler la tension du câble T_i à une constante $\forall i$, tension que l'énoncé note T . La seconde équation conduit ensuite à $T \theta_{i+1} = F + T \theta_i$. En introduisant $f = \frac{F}{T}$, on arrive à la relation de récurrence attendue² : $\theta_{i+1} = f + \theta_i$. Cette relation correspond à une suite arithmétique, on exprime donc le lien entre θ_i et θ_1 : $\theta_i = (i - 1)f + \theta_1$.

4. On étudie l'équilibre complet du câble situé entre deux poteaux consécutifs, voir le schéma de la figure 7. Il y a deux forces de tension au niveau de chaque poteau et la force verticale $N\vec{F}$ qui somme toutes les forces des suspentes. Sur le schéma, on a seulement représenté la résultante appliquée au milieu du câble. Travailler avec la résultante ne change rien car nous allons uniquement écrire que la somme des forces appliquées est nulle. On a donc $\vec{T}_1 + \vec{T}' + N\vec{F} = \vec{0}$. Par symétrie de la situation par rapport au milieu du câble, les angles sont les mêmes en valeur absolue pour les forces $\vec{T}_1$ et $\vec{T}'$. L'angle au niveau de S_1 est $\theta_1 < 0$ compte tenu du choix de l'énoncé, par contre de l'autre côté, on a $\theta' = -\theta_1 > 0$. En projetant sur l'axe horizontal, on arrive à la même conclusion que précédemment à savoir que $T_1 = T' = T$ puisque l'on continue à travailler avec des angles petits. En projetant sur la verticale, on a $- \theta_1 T = NF + \theta_1 T$ avec $\sin \theta_1 \simeq \theta_1$. On trouve que $-2T\theta_1 = NF$. Cela permet de déterminer l'angle d'inclinaison en début de câble : $\theta_1 = -\frac{N}{2}f$. On reprend la relation $\theta_i = (i - 1)f + \theta_1$ pour écrire : $\theta_i = (i - 1 - \frac{N}{2})f$.

5. La déflexion pour un segment est $d \tan \theta_i \simeq d\theta_i$ puisque les angles sont petits. La déflexion totale Δ s'obtient par addition de toutes les déflexions du point 1 jusqu'au point milieu du câble qui est obtenu pour l'abscisse $i = \frac{N+1}{2}$. On a donc $\Delta = -d(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{\frac{N+1}{2}})$. Le signe moins est la conséquence du fait que nous avons compté la déflexion à partir du poteau de gauche et que tous les angles θ_i sont négatifs. Δ est donc la somme des termes d'une suite arithmétique de raison f , de premier terme θ_1 , de dernier terme $\theta_{\frac{N+1}{2}}$, comportant donc $\frac{N+1}{2}$ termes. On en déduit que $\Delta = -d \frac{N+1}{4} (\theta_1 + \theta_{\frac{N+1}{2}})$. On trouve : $\Delta = \frac{(N+1)^2}{8} f d$.

6. Numériquement, on a $f = \frac{F}{T} \simeq 3,5 \times 10^{-2}$. On trouve ensuite $\Delta \simeq 2,2 \text{ m}$.

2. L'énoncé contenait une erreur, l'expression de θ_{i+1} ne dépend pas de F mais uniquement de f et de θ_i .

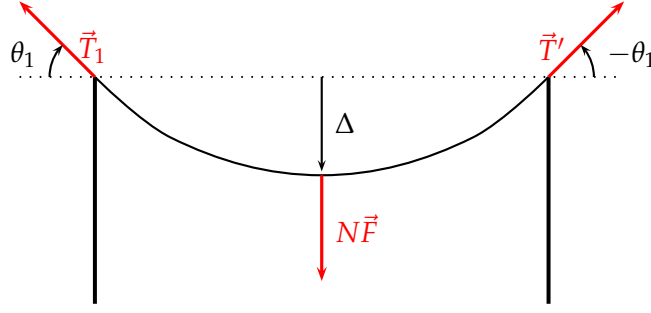


FIGURE 7 – Équilibre du câble entre deux poteaux

2 Étude du comportement dynamique du pantographe

7. On étudie comme système la masse M dans le référentiel terrestre supposé galiléen, il est soumis à son poids $Mg\vec{e}_z$, la force du ressort $k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$, la force des frottements visqueux³ $-c\dot{z}\vec{e}_z$ et enfin à la force $R\vec{e}_z$. On a donc $M\ddot{z} = Mg + k(\ell - \ell_0) - c\dot{z} + R$. À l'équilibre sans contact avec le fil électrique, on a $0 = Mg + k(\ell_{eq} - \ell_0)$. La longueur à l'équilibre du ressort est donc $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}$. En soustrayant ces deux équations, on arrive à $M\ddot{z} = k(\ell - \ell_{eq}) - c\dot{z} + R$. D'après les repères de positions qui sont fournis, on a $\ell + z + h = \ell_{eq}$. On a donc $\ell - \ell_{eq} = -(z + h)$. L'équation différentielle du mouvement s'écrit finalement $M\ddot{z} = -k(z + h) - c\dot{z} + R$. On peut la réorganiser en introduisant les constantes proposées à savoir ω :

$$\ddot{z} + \frac{c}{M}\dot{z} + \omega^2 z = -\omega^2 h + \frac{R}{M}.$$

8. On néglige le terme d'amortissement, l'équation différentielle devient alors $\ddot{z} + \omega^2 z = -\omega^2 h + \frac{R}{M}$. On a $z = u(x) = a \sin Kx$ avec $x = Vt + x_0$ puisque le train est supposé avancer à vitesse constante. Moyennant un choix judicieux de l'origine des dates, on peut travailler avec $x_0 = 0$. On a donc $z(t) = a \sin \Omega t = a \sin \Omega t$. On dérive deux fois pour obtenir $\ddot{z} = -a\Omega^2 \sin \Omega t$. En remplaçant dans l'équation différentielle et en isolant la force de contact R , on obtient

$$R = M\omega^2 \left[h + a \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \sin \Omega t \right].$$

9. Le contact existe tant que $R > 0$, c'est-à-dire tant que $h + a \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \sin \Omega t > 0$. On pose $Q = \frac{\Omega^2}{\omega^2} > 0$. On peut commencer par s'interroger sur le signe de $1 - Q$ et donc sur la comparaison de Q à 1. Imaginons $Q < 1$, alors $1 - Q > 0$. La valeur la plus critique de la fonction sinusoïdale correspond à $\sin \Omega t = -1$, on obtient alors la discussion du signe sur le terme $h - a(1 - Q)$. Or, $a(1 - Q) < a$ et $a < h$ d'après l'énoncé. On peut conclure que, dans ce cas-là, on a toujours $h + a \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \sin \Omega t > 0$, la réaction ne s'annule jamais. Le cas envisagé n'est pas intéressant pour notre discussion. On se place donc dans la configuration où $Q > 1$. Le moment le plus critique correspond, cette fois, à $\sin \Omega t = 1$. On doit donc discuter le signe de $h - a(Q - 1) > 0$ pour que le contact existe. On a donc $Q < 1 + \frac{h}{a}$. Si Q devient plus grand (ou égal à la limite) à la quantité précédente, le contact est perdu. La valeur critique du rapport Q est donc : $Q_c = 1 + \frac{h}{a}$.

10. On suppose que $Q > Q_c$, le contact ne sera pas toujours maintenu. On aura $R = 0$ lorsque $h + a(1 - Q) \sin \Omega t_d = 0$. Cela correspond à $\sin \Omega t_d = \frac{h}{a(Q-1)}$. Cette solution existe puisque $Q > 1 + \frac{h}{a}$, on a donc $Q - 1 > \frac{h}{a}$. On peut donc écrire $\sin \Omega t_d = \frac{h}{a(Q-1)} = \frac{h}{a} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} = \alpha$. On en déduit que la phase est : $\Omega t_d = \arcsin \alpha$ puisque l'angle est compris entre 0 et $\pi/2$. On a $z(t_d) = z_d = a \sin \Omega t_d = a\alpha$ et $\dot{z}_d = a\Omega \cos \Omega t_d = a\Omega \sqrt{1 - \alpha^2}$.

11. L'équation différentielle en l'absence de contact est $\ddot{z} + \omega^2 z = -\omega^2 h$. Le changement d'origine des dates $t \rightarrow \tau = t - t_d$ ne change rien à la forme de l'équation différentielle. On a l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique avec un second membre constant. On a donc $z = -h + A \cos \omega \tau + B \sin \omega \tau$. On utilise les conditions initiales à $\tau = 0$ pour déterminer les deux constantes d'intégration. Pour la position,

3. La définition du coefficient d'amortissement pouvait interroger, on pouvait penser à un coefficient adimensionné ou bien au coefficient en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans la suite de l'énoncé, on peut voir que la grandeur ε telle qu'elle est définie impose que c soit dimensionné.

cela donne $-h + A = a\alpha$. Pour la vitesse, on a $\dot{z} = -A\omega \sin \omega\tau + B\omega \cos \omega\tau$. À l'instant initial, cela permet d'écrire que $B\omega = a\Omega\sqrt{1-\alpha^2}$. Finalement, on a : $z(\tau) = -h + (h + a\alpha) \cos \omega\tau + a\frac{\Omega}{\omega}\sqrt{1-\alpha^2} \sin \omega\tau$.

12. Si l'on suppose que $Q \gg 1$, alors on peut écrire une nouvelle expression pour la force de contact entre la caténaire et le fil $R = M\omega^2(h - aQ \sin \Omega t)$. R s'annule pour $\sin \Omega t_d = \frac{h}{aQ} \ll 1$. Cela correspond à une perte de contact très rapide. En simplifiant, on peut dire que le **contact ne s'effectue presque jamais** ! Cela va poser un problème pour la transmission de la puissance nécessaire au train pour avancer.

13. On pose en fait $c = M\omega\sqrt{\varepsilon}$. Dans l'équation différentielle du mouvement de la caténaire, on a donc $M\ddot{z} + M\omega\sqrt{\varepsilon}\dot{z} + kz = -kh + R$. On divise par M pour arriver à la forme $\ddot{z} + \omega\sqrt{\varepsilon}\dot{z} + \omega^2z = -\omega^2h + \frac{R}{M}$. Pour la recherche de la solution générale, on peut rapprocher cette équation de la forme canonique traditionnelle des oscillateurs linéaires de facteur de qualité⁴ Q , de pulsation propre ω_0 s'écrit $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2z = 0$. On identifie donc bien ω comme la pulsation propre de l'oscillateur et $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ comme le facteur de qualité.

14. Sur le graphique de la figure 8, on a représenté la fonction $f(Q) = (1-Q)^2 + \varepsilon Q^2$ comme somme de deux fonctions $(1-Q)^2$ et εQ^2 . On marque la valeur seuil à partir de laquelle le contact est perdu à savoir $\frac{h^2}{a^2}$. Sur le graphique, on retrouve le rapport critique $Q_c = 1 + \frac{h}{a}$ que l'on avait défini auparavant. Lorsque l'on prend en compte l'amortissement, on peut voir que le nouveau rapport critique Q'_c est inférieur à celui que l'on avait trouvé pour $c = 0$ à savoir $Q_c = 1 + \frac{h}{a}$. L'amortissement **favorise le décollement**, cela peut se comprendre car cela ralentit les évolutions et cela les ralentit d'autant plus qu'elles sont rapides.

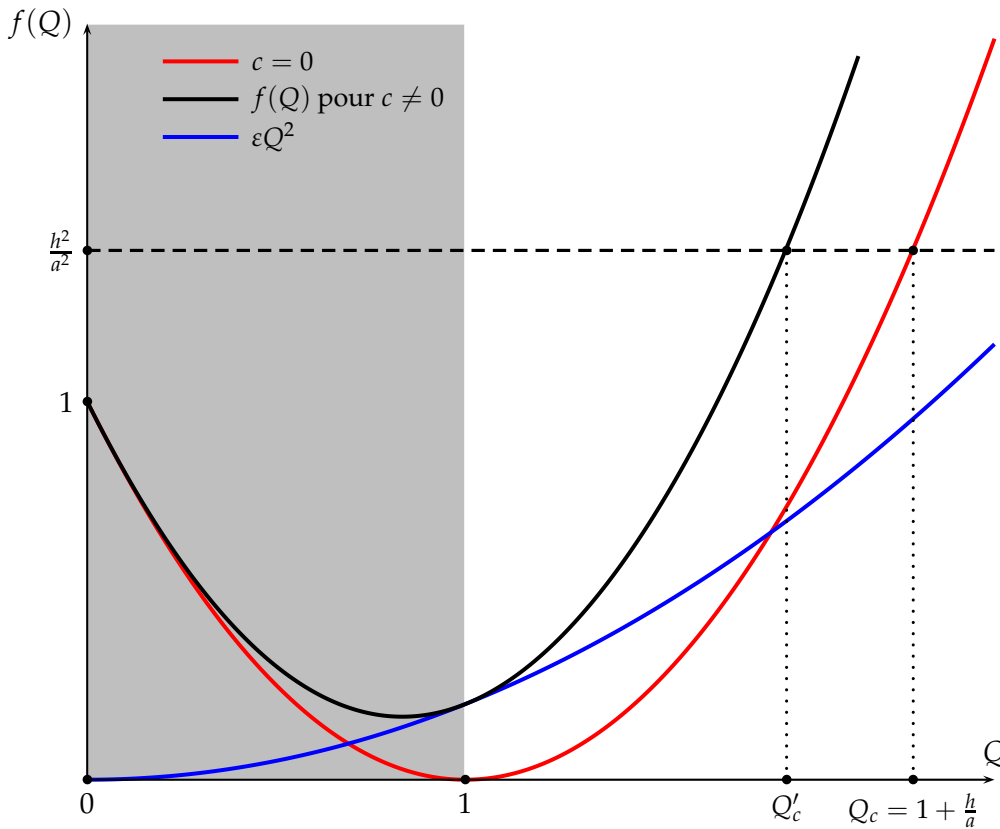


FIGURE 8 – Influence de l'amortissement sur la perte du contact

3 Étude de la réponse dynamique verticale du pantographe

Étude de la phase de mise en contact du pantographe avec le fil de contact

15. On note ℓ_{v0} et ℓ_{v1} les longueurs à vide des deux ressorts de raideur k_0 et k_1 . On note ℓ_{eq0} et ℓ_{eq1} les longueurs à l'équilibre des deux ressorts, équilibre sous l'effet du poids de M_1 . La condition d'équilibre

4. On notera que la notation Q traditionnelle pour le facteur de qualité n'a rien à avoir avec la grandeur Q posée par l'énoncé.

de la masse M_1 accrochée au ressort 1 est donnée par la relation $M_1 g = k_1(\ell_{v1} - \ell_{eq1})$. Au niveau du point D , les forces exercées par les deux ressorts sont opposées ou égales en norme. On a donc la relation $k_1(\ell_{v1} - \ell_{eq1}) = k_0(\ell_{v0} - \ell_{eq0})$. On écarte la masse M_1 de sa position d'équilibre d'une quantité z_1 telle qu'elle est définie par l'énoncé. On applique la relation de la Dynamique à la masse M_1 dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Ce système est soumis à $f(t)\vec{e}_z$, à la force exercée par le ressort, à son poids et à la force due à l'amortisseur. Comme M_1 a été déplacée de z_1 , le point D situé entre les deux ressorts a, lui aussi, été déplacé. Nous allons noter z_0 ce déplacement orienté dans le même sens que z_1 , en faisant remarquer que cette grandeur n'est pas la même que celle que l'énoncé avait définie au départ. La longueur du ressort 1 augmente de z_1 et diminue de z_0 et donc augmente de $z_1 - z_0$. L'amortisseur fonctionnant entre la masse M_1 et le point D , la force de freinage subie par M_1 s'exprime en fonction de la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur. Cette force est de la forme $-c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_0)\vec{e}_z$. À partir de là, on peut écrire la relation de la Dynamique sur l'axe Oz : $M_1\ddot{z}_1 = f(t) - M_1g - k_1(\ell_{eq1} + z_1 - z_0 - \ell_{v1}) - c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_0)$. La condition d'équilibre simplifie un peu l'équation. On obtient : $M_1\dot{z}_1 = f(t) - k_1(z_1 - z_0) - c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_0)$. On constate bien ce qu'avancait l'énoncé, à savoir que le système possédait deux degrés de liberté z_1 et z_0 . Ces deux degrés ne sont pas indépendants en raison de l'égalité en norme des forces agissant en D dues à chaque ressort. Comme pour l'étude de l'équilibre, on a une relation : $k_1(\ell_{v1} - (\ell_{eq1} + z_1 - z_0)) = k_0(\ell_{v0} - (\ell_{eq0} + z_0))$. En tenant compte de la même relation existant pour l'équilibre, on a une simplification pour obtenir $z_0 = \frac{k_1}{k_0+k_1}z_1$ qu'il est plus pratique d'écrire sous la forme $z_1 - z_0 = \frac{k_0}{k_0+k_1}z_1$. L'équation différentielle concernant z_1 devient alors $M_1\ddot{z}_1 + c_1\frac{k_0}{k_0+k_1}\dot{z}_1 + \frac{k_0k_1}{k_0+k_1}z_1 = f(t)$. En passant dans le domaine de LAPLACE, on arrive à $M_1p^2 + c_1\frac{k_0}{k_0+k_1}p + \frac{k_0k_1}{k_0+k_1} = F(p)$. La fonction de transfert caractérisant la réponse z_1 à la force f dans la phase d'approche est donc :

$$H(p) = \frac{1}{M_1p^2 + c_1\frac{k_0}{k_0+k_1}p + \frac{k_0k_1}{k_0+k_1}}.$$

16. Si on néglige le terme faisant intervenir M_1 à savoir le terme d'ordre 2, on obtient un transfert simplifié $H(p) = \frac{1}{c_1\frac{k_0}{k_0+k_1}p + K} = \frac{Z_1(p)}{F(p)}$. En repassant dans le domaine temporel, cela correspond à l'équation différentielle $c_1\frac{k_0}{k_0+k_1}\frac{dz_1}{dt} + Kz_1 = f_0$ pour $t \geq 0$. On peut faire apparaître une constante de temps en factorisant par K : $\frac{c_1}{K}\frac{dz_1}{dt} + z_1 = \frac{f_0}{K}$. On voit que le temps caractéristique qui intervient est $\tau_1 = \frac{c_1}{K}$. La solution de l'équation différentielle est $z_1 = \frac{f_0}{K} + A \exp -\frac{t}{\tau_1}$. À la date $t = 0$, on a $z_1 = 0$. On peut en déduire la forme finale de la solution :

$$z_1 = \frac{f_0}{K}(1 - \exp -\frac{t}{\tau_1}).$$

17. Si la masse M_1 avait été prise en compte, la réponse aurait été nécessairement plus lente pour obtenir la valeur asymptotique à savoir $\frac{f_0}{K}$ puisque M_1 représente l'inertie. En fonction des valeurs des paramètres, on aurait pu avoir des oscillations autour de la valeur asymptotique puisque l'on a un ordre 2. Il aurait pu y avoir un dépassement momentané de la valeur $\frac{f_0}{K}$.

18. Le contact s'établit lorsque $z_1 = b$. Il faut que la force f_0 soit suffisante pour que z_1 atteigne b . On doit donc avoir $b < \frac{f_0}{K}$. Il faut donc que $\frac{Kb}{f_0} < 1$. L'énoncé propose de poser $\beta = \frac{Kb}{f_0}$ et indique que $\beta < 1$. La force f_0 est donc suffisante pour que le contact se fasse (ce qui est préférable...). Il s'effectue à la date t_c tel que $b = \frac{f_0}{K}(1 - \exp -\frac{t_c}{\tau_1})$. On en déduit que $1 - \beta = \exp -\frac{t_c}{\tau_1}$. Cela permet d'obtenir l'expression demandée⁵ :

$$t_c = \tau_1 \ln \frac{1}{1-\beta}.$$

19. La masse M_1 continue de monter sous l'effet de f_0 mais subit en plus la force exercée par l'extrémité du ressort 2. La masse M_1 est à l'équilibre à la position z'_{1eq} . Cette abscisse vérifie donc la relation $f_0 - Kz'_{1eq} - f_{2/1} = 0$ en notant $f_{2/1}$ la norme de la force exercée par la masse M_2 sur la masse M_1 par le contact existant entre les deux. On a donc une première relation $f_0 = Kz'_{1eq} + f_{2/1}$. La condition d'équilibre du ressort de raideur k_2 sans contact est : $-M_2g + k_2(\ell_{eq2} - \ell_{v2}) = 0$. Le contact provoque le déplacement de la masse M_2 vers le haut de z'_{2eq} . De plus, M_2 subit la force exercée par la masse M_1 . On a donc une nouvelle condition d'équilibre qui s'écrit $-M_2g + k_2(\ell_{eq2} - z'_{2eq} - \ell_{v2}) + f_{1/2} = 0$ où $f_{1/2}$ est la norme de la force exercée par la masse M_1 sur la masse M_2 . On en déduit que $f_{1/2} = k_2z'_{2eq}$. Par le principe des actions réciproques, on a $f_{1/2} = f_{2/1}$. De plus, le repérage des abscisses permet d'écrire que $z'_{1eq} = z'_{2eq} + b$. On peut donc

5. On peut remarquer que l'expression obtenue dépend de τ_1 et non pas de τ comme l'énoncé l'indiquait.

écrire que $f_{1/2} = k_2(z'_{1eq} - b)$. En utilisant cette relation dans la première condition d'équilibre, on arrive à la relation demandée à savoir $z'_{1eq} = \frac{f_0 + Kb}{K + k_2}$. Cette relation permet d'ailleurs d'établir l'expression de $f_{1/2} = k_2(\frac{f_0 + k_2 b}{K + k_2} - b) = \frac{k_2}{K + k_2}(f_0 - Kb)$. Cela correspond bien à l'expression proposée par l'énoncé ensuite.

Étude de l'influence d'un défaut de positionnement vertical du fil de contact

20. Le défaut de positionnement a pour conséquence de modifier la longueur du ressort de raideur k_2 . $G(p)$ est le rapport d'une force sur une longueur, c'est dimensionnellement équivalent à une raideur. Si l'on fait $p = 0$, on trouve que $G(p = 0) = -G_0$. $p = 0$ correspond à une situation statique. Il est donc légitime de considérer que l'on a : $G_0 = k_2$.

21. La fonction de transfert peut nous renseigner par les pôles du numérateur, à condition bien sûr que ces pôles soient des réels positifs. En effet, si le numérateur s'annule alors $f_{1/2}$ va s'annuler ce qui traduit la perte du contact.

22. On peut voir que la fonction de transfert⁶ s'annule pour $\omega \simeq 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, le contact est pour ainsi dire perdu. Ensuite la force augmente fortement, le graphique présente une résonance. La présence d'une résonance peut être embêtante car la force exercée par la caténaire sur le fil devient très grande, on peut avoir une rupture du câble s'il présente un défaut. À haute fréquence, on a un comportement asymptotique

lié aux termes dominants en p^3 . L'asymptote est donnée par $\left(\frac{\tau_{3N}}{\tau_{3D}}\right)^3 \simeq 10$. On peut aussi s'intéresser au zéro du numérateur de la fonction de transfert. On a $|G(i\omega)/G(0)| = \frac{\sqrt{(1 - \omega^2 \tau_{2N}^2)^2 + \omega^2 (\tau_{1N} - \tau_{3N}^3 \omega^2)}}{|D|}$ où $|D|$ est le module du dénominateur de la fonction de transfert. Cette grandeur peut s'annuler si le numérateur s'annule et donc si l'on a simultanément $\omega^2 = \frac{1}{\tau_{2N}^2}$ et $\omega^2 = \frac{\tau_{1N}}{\tau_{3N}^3}$. On en déduit une seconde relation nécessaire entre les temps caractéristiques du problème : $\tau_{3N}^3 = \tau_{1N} \tau_{2N}^2$.

23. On a $\lambda = V \frac{2\pi}{\omega}$. Sur le graphique, nous avons lu $\omega \simeq 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ pour la perte de contact. Comme la vitesse est $V = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on trouve que $\lambda \simeq 125 \text{ m}$.

6. La pulsation ω définie dans cette partie du sujet n'a rien à voir avec la pulsation propre du modèle visco-élastique de la caténaire présenté dans le début de l'étude. Ici, c'est la pulsation variable de l'étude du comportement du défaut de hauteur.