

1. Si on note L la distance caractéristique de variation de $S(z)$, que l'on peut définir par $\left| \frac{1}{S(z)} \frac{dS}{dz} \right| = \frac{1}{L}$, alors L doit vérifier $L \gg \lambda_0$ (longueur d'onde de l'onde acoustique). On garde donc la condition

$$\lambda_0 \ll \frac{1}{\left| \frac{1}{S(z)} \frac{dS}{dz} \right|} \quad (1)$$

2. Isentropique = adiabatique réversible. Pour adiabatique, on doit négliger les transferts thermiques entre particules de fluide. Pour réversible, il faut négliger en outre d'autres phénomènes dissipatifs tels que la viscosité. L'écoulement étudié sera donc considéré comme parfait.

3. $\chi_0 = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{(\text{entropie})} = +\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{(\text{entropie})}$ (on n'a pas indiqué S en indice pour éviter la confusion avec la section).

4. Ici cela aboutit après linéarisation à

$$\rho_a(z, t) = \rho_0 \chi_0 p(z, t) \quad (2)$$

5. Il s'agit en fait d'effectuer ici un bilan de masse.

Première méthode pour exprimer la variation de masse : la masse de volume d'air considérée vaut $dm(t) = S(z)dz\rho(z, t)$.

D'où la variation (temporelle) recherchée $d(dm) = dm(t+dt) - dm(t) = S(z)dz \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$

Deuxième méthode (on tient compte des flux par les surfaces $S(z)$ et $S(z+dz)$) : $d(dm) = +S(z)\rho(z, t)v(z, t)dt - S(z+dz)\rho(z+dz, t)v(z+dz, t)dt = -\frac{\partial(\rho v S)}{\partial z} dz dt$

En identifiant ces deux expressions, on obtient l'équation locale de conservation de la masse : $S(z) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v S) = 0$,

que l'on peut aussi écrire $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{S(z)} \frac{\partial}{\partial z} (\rho v S) = 0$.

6. On linéarise cette équation et on aboutit à

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{1}{S(z)} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 v S) = 0 \quad (3)$$

7. Le référentiel d'étude (terrestre) est considéré comme galiléen. On va écrire le théorème de la quantité de mouvement en projection sur z . La masse du système est $\rho(z, t)S(z)dz$.

Son accélération vaut $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$, que je propose de linéariser dès maintenant pour ne conserver que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$.

Les forces appliquées au système, en projection sur z , comprennent bien évidemment les deux termes $+P(z, t)S(z)$ et $-P(z+dz, t)S(z+dz)$, mais pas seulement (ce sur quoi l'énoncé attire l'attention [maladroitement](#)) : il faut ajouter la composante z des forces de pression exercées par les parois du pavillon sur le système. Cette dernière s'écrit $[S(z+dz) - S(z)]P(z, t)$.

En fait, on peut remplacer dans tous ces termes $P(z, t)$ par $p(z, t)$ car la pression P_0 apporte une contribution nulle.

Et on aboutit donc à une composante z des forces de pression égale à $-\frac{\partial}{\partial z} (Sp) dz + \frac{dS}{dz} dz p(z, t) = -S(z) \frac{\partial p}{\partial z} dz$.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors, en projection sur z , et en posant $\vec{v}(z, t) = v(z, t)\vec{e}_z$:

$$\rho(z, t) \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

Remarque : on pourrait aussi directement utiliser le fait que la résultante volumique des forces de pression est égale à $-\overrightarrow{\text{grad}}P$ et donc ajouter $-\frac{\partial p}{\partial z}$ dans le membre de droite. Mais on voit moins le lien avec la précaution indiquée par l'énoncé.

8. On linéarise alors cette équation 4 pour aboutir à

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (5)$$

9. En éliminant ρ_a , 2 et 3 mènent à $S(z)\rho_0\chi_0\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial}{\partial z}(vS) = 0$ puis, en divisant par $\rho_0\chi_0 S(z)$, à

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\chi_0 S(z)} \frac{\partial}{\partial z}(vS) = 0 \quad (6)$$

Il suffit alors d'éliminer la pression p entre 5 et 6 en dérivant 5 par rapport à t et 6 par rapport à z pour arriver à l'équation demandée :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{S(z)} \frac{\partial(Sv)}{\partial z} \right) = 0 \quad (7)$$

avec $c^2 = \frac{1}{\rho_0\chi_0}$.

10. Remarque : avec cette expression de $S(z)$, on a $\frac{1}{S(z)} \frac{dS}{dz} = -\frac{1}{\delta}$ (voir question 1 : la distance caractéristique de variation de $S(z)$ est ici δ).

Il suffit de reporter l'expression de $S(z)$ dans 7 pour aboutir à :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{c^2}{\delta} \frac{\partial v}{\partial z} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

11. En espace libre, il s'agit de l'équation de d'Alembert et elle ne comporte pas le terme $\frac{c^2}{\delta} \frac{\partial v}{\partial z}$.

12. La relation de dispersion s'obtient immédiatement : $-\omega^2 + \frac{c^2}{\delta} ik + c^2 k^2 = 0$, qui peut aussi s'écrire :

$$c^2 k^2 + i \frac{c^2}{\delta} k - \omega^2 = 0 \quad (9)$$

13. On va plutôt raisonner sur le vecteur d'onde k que sur le nombre d'onde $\frac{k}{2\pi}$. C'est une équation du second degré

en k , dont le discriminant vaut $\Delta = -\frac{c^4}{\delta^2} + 4\omega^2 c^2$. Si ce discriminant est strictement positif, on obtient deux racines complexes conjuguées, dont la partie réelle n'est pas nulle. S'il est négatif ou nul, les deux racines sont bien imaginaires pures.

La condition recherchée est donc $\Delta \leq 0$, à savoir $\omega \leq \frac{c}{2\delta}$.

Ici $\frac{c}{2\delta} \simeq 3,4 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$, ce qui correspond à une fréquence d'environ 5 kHz. La condition est donc bien vérifiée pour

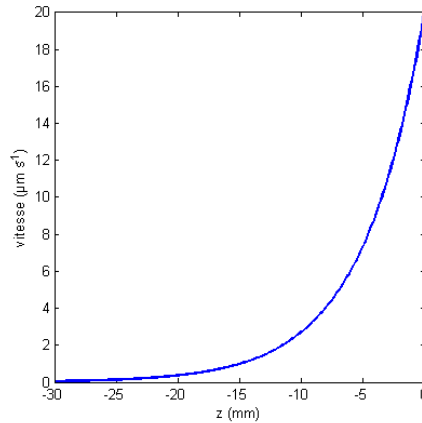
les fréquences caractéristiques de la parole. Le vecteur d'onde k est donc imaginaire pur : $k = -\frac{i}{2\delta} \pm \frac{i}{2c^2} \sqrt{-\Delta}$.

14. On a en fait $\omega \ll \frac{c}{2\delta}$ et donc $\Delta \simeq -\frac{c^4}{\delta^2}$; les deux racines pour k sont donc égales à $-\frac{i}{\delta}$ pour l'une, et beaucoup plus petite (en module) pour l'autre. La première donne une onde dont l'amplitude va augmenter à l'intérieur du conduit auditif, lorsque z augmente, alors que la seconde donne une onde d'amplitude à peu près constante. Conformément à la suggestion de l'énoncé, on ne conserve que la solution de plus forte amplitude au niveau du tympan, c'est à dire celle correspondant à $k = -\frac{i}{\delta}$: on a alors $e^{ikz-i\omega t} = e^{\frac{z}{\delta}} e^{-i\omega t}$. Au bout de 30 mm, à savoir 6δ , l'amplitude aura été multipliée par $e^6 \simeq 400$, et atteindra donc $20 \mu\text{m.s}^{-1}$.

15. La solution a pour forme $v(z, t) = \Re(\underline{v}(z, t)) = v_0 e^{z/\delta} \cos(\omega t)$. À un instant t_m où la vitesse est extrême, $\cos(\omega t_m) = 1$ et on trace donc $v_m(z) = v_0 e^{z/\delta}$.

16. L'oreille externe a donc pour rôle d'amplifier les ondes acoustiques (dont l'énergie se répartit sur des surfaces de plus en plus petites au fur et à mesure que l'on avance dans le pavillon).

17. Il s'agit d'une question de cours. On utilise la continuité des pressions et des vitesses à l'interface, ainsi que la relation de structure de chacune des trois ondes. On aboutit à $r = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$ et $\tau = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$.



Question 15.

18. Suite de la question de cours... $R = \left| \frac{\langle p_r v_r \rangle}{\langle p_i v_i \rangle} \right|$ et $T = \left| \frac{\langle p_{tr} v_{tr} \rangle}{\langle p_i v_i \rangle} \right|$. En utilisant là encore les relations de structure, on a

$$\text{donc } R = \frac{\langle p_r^2 \rangle}{\langle p_i^2 \rangle} = r^2 = \frac{(\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1)^2}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2} \text{ et } T = \frac{\frac{1}{\rho_2 c_2} \langle p_{tr}^2 \rangle}{\frac{1}{\rho_1 c_1} \langle p_i^2 \rangle} = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \tau^2 = \frac{4 \rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2}.$$

19. On a $\rho_1 c_1 = 1,25 \times 340 = 425 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \ll \rho_2 c_2 = 1000 \times 1500 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$. D'où $T \simeq \frac{4 \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} = \frac{4 \times 425}{1,5 \cdot 10^6} = \frac{1700}{1,5 \cdot 10^6} = \frac{34}{3 \cdot 10^4} \simeq 1,1 \cdot 10^{-3}$. *Petite remarque : ce n'est pas exactement l'intensité acoustique transmise que l'on donne ici mais le coefficient de transmission T en puissance moyenne.*

20. Le théorème de la quantité de mouvement, appliqué au système solide formé de la masse m , et des deux pistons, s'écrit, en projection sur x :

$$m\ddot{x} = +S_t p_t(t) - S_c p_c(t) - kx(t) \quad (10)$$

21. $Z_0 = \frac{p_c}{\dot{x}}$.

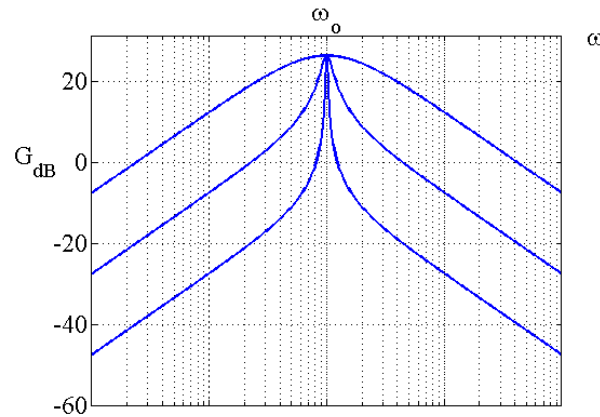
22. L'équation 10 se réécrit donc, en régime sinusoïdal, $m \frac{-i\omega p_c}{Z_0} = S_t p_t - S_c p_c - \frac{k}{Z_0} \frac{p_c}{-i\omega}$. Et on en déduit :

$$G(\omega) = \frac{p_c}{p_t} = \frac{S_t}{S_c + \frac{i}{Z_0} \left(\frac{k}{\omega} - m\omega \right)} \quad (11)$$

23. La valeur maximale du gain a été prise égale à 21 (voir question 25), et on a tracé le gain pour trois valeurs du facteur de qualité : $Q = 0, 5, 5$ et 50 (de haut en bas).

24. On reconnaît un filtre passe-bande. On identifie l'expression de $G(\omega)$ à la forme canonique $G(\omega) = \frac{A}{1 - iQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$ pour déterminer les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q . On a $Q\omega_0 = \frac{k}{Z_0 S_c}$ et $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{m}{Z_0 S_c}$, d'où l'on tire

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{Z_0 S_c} \quad (12)$$



Question 23 : gain en dB pour $Q = 0,5$, 5 et 50 (de haut en bas).

À basse fréquence, $|G(\omega)| \sim \frac{S_t Z_0}{k} \omega$: on a un comportement dérivateur, une pente (en diagramme de Bode) de $+20$ dB/décade.

À haute fréquence, $|G(\omega)| \sim \frac{S_t Z_0}{m} \frac{1}{\omega}$: on a un comportement intégrateur, une pente (en diagramme de Bode) de -20 dB/décade.

25. La valeur maximale du gain est obtenue pour $\omega = \omega_0$; elle vaut le A de la forme canonique, à savoir ici $\frac{S_t}{S_c} = \frac{70}{3,3} \simeq 21$.
26. D'après l'énoncé, l'oreille moyenne se trouve entre l'oreille externe (milieu assimilé à l'air, pression p_t) et l'oreille interne (milieu assimilé à l'eau, pression p_c), et assure la transmission du signal entre ces deux milieux. En lien avec la question 18, on définit :

$$T' = \left| \frac{p_{tr}(0, t) v_{tr}(0, t)}{p_i(0, t) v_i(0, t)} \right| = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \left| \frac{p_{tr}(0, t)}{p_i(0, t)} \right|^2 = \frac{\rho_{air} c_{air}}{\rho_{eau} c_{eau}} G_{max}^2 = \frac{1}{4} T G_{max}^2 \simeq \frac{1, 1 \cdot 10^{-3} \times 21^2}{4} \simeq 0,12 \quad (13)$$

27. Les poissons vivent dans l'eau. Ils ne souffrent pas du $1, 1 \cdot 10^{-3}$, donc ils n'ont pas besoin du 21^2 .
28. **Je ne sais pas trop ce que signifie "vertical" dans ce contexte ; je traduirais par "transversal".** Les fréquences propres sont les $f_p = p \frac{c'}{2L}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. On a noté c' la célérité des ondes qui peuvent se propager sur la corde (pour ne pas confondre avec le c introduit à la question 34). Si la corde s'étend de $x = 0$ à $x = L$ et vibre dans la direction y , alors les modes propres ont pour expression $y_p(x, t) = A_p \sin \frac{p\pi x}{L} \cos \left(p \frac{\pi c'}{L} t \right)$ (avec A_p l'amplitude du mode p).
29. Seules les cordes dont l'une des pulsations propres est égale à ω vont pouvoir vibrer.
30. Seules les pulsations propres engendrent une amplitude suffisante pour envoyer un potentiel d'action.
31. Quelle que soit la fréquence, on observe la même évolution de l'amplitude du déplacement de la membrane en fonction de x : l'amplitude commence par croître, atteint un maximum assez « étroit » à une certaine abscisse, puis chute brutalement (l'abscisse du maximum dépend, elle, de la fréquence considérée) ; les ondes de haute fréquence sont détectées les premières, alors que les ondes de fréquence plus basse sont détectées plus profondément dans la cochlée. On peut proposer le lien suivant avec le modèle simple de von Helmholtz : la plupart des cordes ont une amplitude de vibration très faible. Seule la première corde rencontrée par l'onde, et dont la pulsation propre fondamentale est égale à ω , entre en résonance et présente donc une amplitude de vibration importante.

La longueur de la corde qui « répond » à la sollicitation de l'onde doit donc être égale à $\frac{\pi c'}{\omega}$, donc inversement proportionnelle à ω . C'est bien ce que l'on semble observer : lorsque la pulsation augmente, la longueur de la corde

correspondante diminue, et celle-ci se situe donc plus près de l'entrée de l'oreille interne.

En fait on a la solution plus loin dans le texte : $c(x)$ n'est définie que jusqu'à $x_{max} = -2L \ln \frac{\omega}{\omega_b}$. Et, lorsque ω double, x_{max} diminue bien d'une quantité constante, comme sur la figure 5 à gauche.

Remarque : le titre du livre de von Helmholtz est erroné ; il s'agit de « On the sensations of tone... »

32. L'unité de la phase sur le figure 5 semble erronée : il s'agit vraisemblablement de degrés. On voit qu'il y a propagation car, à fréquence donnée, le retard de phase augmente lorsque x augmente.

33. Dans le cas d'une onde plane dans l'air (ou dans l'eau d'ailleurs), le retard de phase est simplement proportionnel à x : on observerait une droite croissante. Commentaire : ce n'est pas ce qui est observé... , et donc les ondes dans la cochlée ne peuvent pas être assimilées à des OPPH.

Remarque : personnellement je ne crois pas trop à la réalité physique du « plateau » qui me semble un artefact numérique. Il est à noter que le plateau est atteint à partir de l'abscisse où l'amplitude de l'onde chute brutalement.

34. On obtient immédiatement $[c] = \text{L.T}^{-1}$: c est homogène à une vitesse.

35. c dépend de x , mais pas de t ; l'équation d'onde peut donc s'écrire :

$$\frac{\partial^2(c^2 h)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(c^2 h)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\partial^2(\underline{a})}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\underline{a})}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

36. Si c était une constante (c'est-à-dire ne dépendait pas de x), on reconnaît alors une équation de d'Alembert, dont les solutions s'écriraient alors

$$\underline{a}(x, t) = [\underline{\alpha} e^{ikx} + \underline{\beta} e^{-ikx}] e^{-i\omega t} \quad (15)$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$: on aurait la superposition de deux OPPM de pulsation ω , se propageant en sens opposés. Mais c n'est pas une constante...

37. $\frac{\partial A_m}{\partial x} = [f'(x) + i\omega f(x)g'(x)] e^{i\omega g(x)}$ et $\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} = [f''(x) + 2i\omega f'(x)g'(x) + i\omega f(x)g''(x) - \omega^2 f(x)g'^2(x)] e^{i\omega g(x)}$

38. On reporte alors $\underline{a}(x, t) = A_m(x) e^{-i\omega t}$ dans l'équation 14 pour aboutir à

$$f''(x) + 2i\omega f'(x)g'(x) + i\omega f(x)g''(x) - \omega^2 f(x)g'^2(x) + \frac{\omega^2}{c^2(x)} f(x) = 0 \quad \forall x \quad (16)$$

(on a simplifié par $e^{-i\omega t}$ et par $e^{i\omega g(x)}$, qui ne s'annulent jamais).

On utilise alors le fait que f et g sont à valeurs réelles pour obtenir deux équations réelles, l'une portant sur la partie réelle, l'autre sur la partie imaginaire :

$$\begin{cases} f''(x) - \omega^2 f(x)g'^2(x) + \frac{\omega^2}{c^2(x)} f(x) = 0 \\ 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

39. L'énoncé nous invite à négliger $f''(x)$ dans la première équation, le système devient alors

$$\begin{cases} -\omega^2 f(x)g'^2(x) + \frac{\omega^2}{c^2(x)} f(x) = 0 \\ 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

De la première équation, on tire

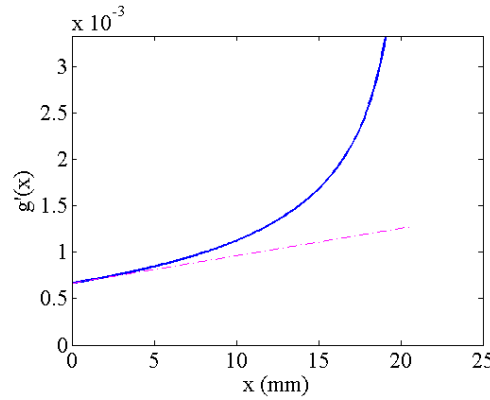
$$g'^2(x) = \frac{1}{c^2(x)} \quad (19)$$

et donc, comme g est croissante :

$$g'(x) = \frac{1}{c(x)} = \frac{1}{d\sqrt{\omega_b^2 e^{-\frac{x}{L}} - \omega^2}} \quad (20)$$

(on suppose que $\omega_b^2 e^{-x/L} - \omega^2$ reste positif dans la région étudiée, et on prend pour $c(x)$ la racine positive).

40. On a $\underline{h}(x, t) = \frac{f(x)}{c^2(x)} e^{-i\omega(t-g(x))}$. Le retard de phase représenté sur la figure 5 est donc égal à $\omega(g(x) - g(0))$.



On constate sur la figure que $g'(x)$ peut-être assimilée à une droite en début de propagation ; le retard de phase, égal à $\omega(g(x) - g(0))$, peut être assimilé à une parabole, ce qui semble cohérent avec le retard de phase présenté figure 5.

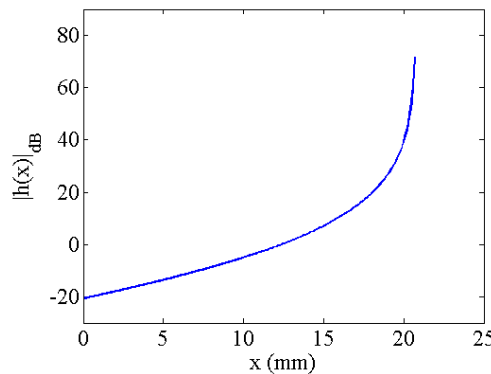
Les candidats n'avaient ni calculatrice à leur disposition, ni valeur numérique pour argumenter cette question ...

41. La deuxième équation, que nous n'avons pas encore utilisée, nous donne alors $2 \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{g''(x)}{g'(x)}$, que l'on intègre en $2 \ln |f(x)| = -\ln(g'(x)) + \text{cte} = \ln(c(x)) + \text{cte}$. D'où $f(x) = K \sqrt{c(x)}$.

42. On a donc $\underline{a}(x, t) = c^2 \underline{h}(x, t) = K \sqrt{c(x)} e^{i\omega g(x)} e^{-i\omega t}$ et donc $\underline{h}(x, t) = K(c(x))^{-\frac{3}{2}} e^{i\omega g(x)} e^{-i\omega t}$. Et enfin

$$|\underline{h}(x, t)| = K(c(x))^{-\frac{3}{2}} = K d^{-\frac{3}{2}} \left(\omega_b^2 e^{-x/L} - \omega^2 \right)^{-\frac{3}{4}} \quad (21)$$

43. Remarque : on a tracé $|\underline{h}(x)|$ en dB pour comparaison avec la figure 5.



Pour comparaison avec la figure 5 (gauche). On a pris $f = 1$ kHz, $\omega_b = 2\omega$, $L = 15$ mm. On a choisi d pour que l'ordonnée en $x = 0$ soit -20 dB. Pour ces valeurs on a $x_{max} = 20,8$ mm.

44. On retrouve le comportement de l'amplitude en début de propagation (jusqu'à x_{max}). Par contre on ne modélise pas ce qui se passe pour $x > x_{max}$.