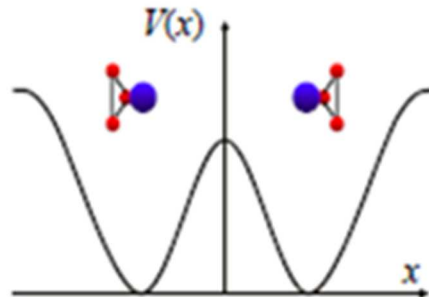


Détection de l'oscillation des neutrinos X 2019 PC B

Ce corrigé a été préparé par Frédéric Morello (frederic.morello@wanadoo.fr) et JC Hulot (pchoche2020@gmail.com)

I- Oscillation des neutrinos

1) L'**effet tunnel** permet le couplage entre les deux puits d'énergie potentielle séparés par une barrière symétrique par rapport au plan des atomes d'hydrogène.



Un état de localisation de la particule dans l'un des puits n'est pas un état stationnaire.

Une localisation plus probable, périodiquement dans chacun des puits, résulte d'un état de superposition de deux états stationnaires d'énergies différentes, l'un symétrique, l'autre antisymétrique.

2) $C_G(t)\varphi_G(x)$ et $C_D(t)\varphi_D(x)$ sont des amplitudes de probabilité dans chacun des états, respectivement « gauche » et « droit ».

L'état considéré est une superposition de deux états dont on somme les amplitudes de probabilité.

La fonction d'onde est normalisée :
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & |C_G(t)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_G(x)|^2 dx + |C_D(t)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_D(x)|^2 dx \\ & + C_G(t)C_D^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_G(x)\varphi_D^*(x) dx + C_G^*(t)C_D(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_D^*(x)\varphi_G(x) dx = 1 \end{aligned}$$

On suppose chacun des états « gauche » et « droit » normalisés, d'où :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_G(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_D(x)|^2 dx = 1$$

Dans le cas d'une barrière centrale de hauteur infinie, on aurait :

$$\varphi_G(x)\varphi_D(x)=0$$

Ce n'est par contre pas le cas avec une barrière de hauteur finie.

Il semble donc nécessaire d'anticiper sur la question suivante en décomposant sur la base des états symétrique et antisymétrique, dont les parties spatiales sont à valeurs réelles :

$$\varphi_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_+(x) + \varphi_-(x)) \quad \text{et} \quad \varphi_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_+(x) - \varphi_-(x))$$

On en déduit :

$$\varphi_G(x)\varphi_D^*(x) = \frac{1}{2}(\varphi_+^2(x) - \varphi_-^2(x))$$

Puis :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_G(x)\varphi_D^*(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_+^2(x)dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_-^2(x)dx$$

Chacune des deux intégrales précédentes vaut 1 et :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_G(x)\varphi_D^*(x)dx = 0$$

De même :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_G^*(x)\varphi_D(x)dx = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{|C_G(t)|^2 + |C_D(t)|^2 = 1}$$

Ce résultat est bien en accord avec la signification d'amplitude de probabilité de $C_G(t)\varphi_G(x)$ et $C_D(t)\varphi_D(x)$ pour un système à deux états.

3) Dans un état stationnaire d'énergie $E_{\pm}$, la fonction d'onde a pour expression :

$$\boxed{\psi_{\pm}(x,t) = \varphi_{\pm}(x) \exp\left(-i \frac{E_{\pm}t}{\hbar}\right)}$$

La densité linéique de probabilité de présence, $|\psi_{\pm}(x,t)|^2$, **ne dépend pas du temps**.

4) La particule est préparée dans l'état « gauche » et sa fonction d'onde vérifie donc la condition initiale :

$$\psi(x,t=0) = \frac{\varphi_+(x) + \varphi_-(x)}{\sqrt{2}}$$

Chacun des termes de la superposition évolue selon l'expression écrite dans **Q3**.

On en déduit :

$$\psi(x, t) = \frac{\varphi_+(x) \exp\left(-i \frac{E_+ t}{\hbar}\right) + \varphi_-(x) \exp\left(-i \frac{E_- t}{\hbar}\right)}{\sqrt{2}}$$

Soit :

$$\psi(x, t) = \frac{(\varphi_G(x) + \varphi_D(x)) \exp\left(-i \frac{E_+ t}{\hbar}\right) + (\varphi_G(x) - \varphi_D(x)) \exp\left(-i \frac{E_- t}{\hbar}\right)}{2}$$

En regroupant, d'une part les termes $\varphi_G(x)$, d'autre part ceux en $\varphi_D(x)$:

$$\psi(x, t) = \frac{\exp\left(-i \frac{E_+ t}{\hbar}\right) + \exp\left(-i \frac{E_- t}{\hbar}\right)}{2} \varphi_G(x) + \frac{\exp\left(-i \frac{E_+ t}{\hbar}\right) - \exp\left(-i \frac{E_- t}{\hbar}\right)}{2} \varphi_D(x)$$

On identifie dans l'expression précédente :

$$C_G(t) = \frac{\exp\left(-i \frac{E_+ t}{\hbar}\right) + \exp\left(-i \frac{E_- t}{\hbar}\right)}{2}$$

5) $C_G(t)$ est l'amplitude de probabilité dans l'état « gauche » et la probabilité que la particule soit dans cet état à l'instant t est donc :

$$P_G(t) = |C_G(t)|^2$$

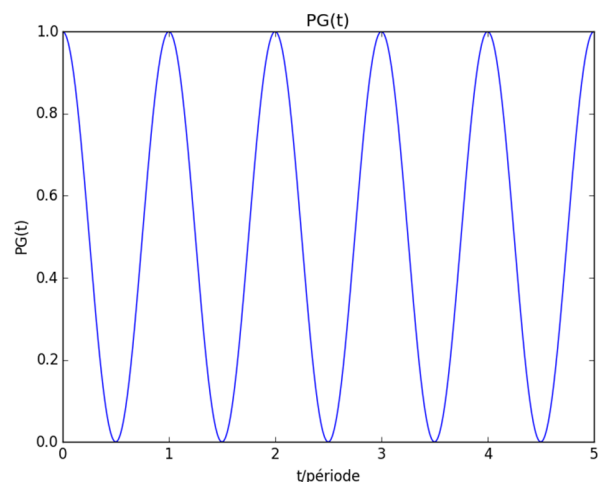
Soit :

$$P_G(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\Delta E \cdot t}{\hbar}\right) \right)$$

ou encore

$$P_G(t) = \cos^2\left(\frac{\Delta E \cdot t}{2\hbar}\right)$$

Cette probabilité varie sinusoïdalement à la **fréquence de Bohr** $\frac{\Delta E}{\hbar}$ et a donc pour période temporelle $\frac{h}{\Delta E}$.



6) L'énergie totale a pour expression :
$$E = pc \sqrt{1 + \left(\frac{mc^2}{pc} \right)^2}$$

Dans la **limite ultrarelativiste** :
$$\frac{mc}{p} = \frac{mc^2}{pc} \ll 1$$

On a alors :
$$E \simeq pc \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{pc} \right)^2 \right)$$

Soit :
$$E \simeq pc + \frac{1}{2} \frac{(mc^2)^2}{pc}$$

7) Deux neutrinos de même quantité de mouvement, mais de masses différentes, ont des énergies qui diffèrent de :
$$\Delta E \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta m^2 c^3}{p}$$

8) On fait l'analogie entre le neutrino dans sa saveur électronique et la molécule d'ammoniac préparée dans un état « gauche » (Q4). On remplace t par $\frac{l}{c}$ dans l'expression obtenue dans Q5, d'où :

$$P_e(l) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\Delta E \cdot l}{\hbar c} \right) \right)$$

Il s'agit effectivement d'une fonction périodique de l , de période :

$$L = \frac{\hbar c}{\Delta E} \quad \text{soit} \quad L = \frac{2\hbar p}{\Delta m^2 c^2}$$

9) Le neutrino étant **ultrarelativiste** : $p \simeq \frac{E}{c}$ et $\Delta E \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta m^2 c^4}{E}$

On a donc :
$$P_e(l) \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\Delta m^2 c^4}{2\hbar c} \frac{l}{E} \right) \right)$$

Il s'agit d'une fonction périodique en $\frac{l}{E}$ et de période $\frac{4\pi\hbar c}{\Delta m^2 c^4}$.

Sur la **figure 1**, on peut déduire des deux maxima de probabilité de détection, respectivement en 32 km.MeV⁻¹ et 70 km.MeV⁻¹, une période de **38 km.MeV⁻¹**. On retient dans la suite **40 km.MeV⁻¹**.

On en déduit (sans calculatrice...) : $\Delta m^2 c^4 = \frac{4\pi \times 0,2 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}}{40 \text{ km} \cdot \text{MeV}^{-1}}$

Soit¹ : $\Delta m^2 c^4 = \frac{4\pi \times 0,2 \times 10^{-6} \text{ MeV} \times 10^{-9} \text{ km}}{40 \text{ km} \cdot \text{MeV}^{-1}}$

D'où : $\Delta m^2 c^4 \approx 6.10^{-17} \text{ MeV}^2$

On peut aussi présenter le résultat en unités SI : $\Delta m^2 c^4 \approx 2.10^{-42} \text{ J}^2$

10) Il faut pouvoir détecter une variation de probabilité de l'état électronique d'au moins

0,1, soit : $\frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\Delta m^2 c^4}{2\hbar c} \frac{l}{E} \right) \right) < 0,9$

Il faut donc imposer : $l > l_{\min} = \frac{2\hbar c E}{\Delta m^2 c^4} \arccos(0,8)$

Retenons une énergie moyenne de 4 MeV (déduite de l'abscisse moyenne sur la **figure 1** et de la valeur de l retenue pour interpréter cette figure).

D'après **Q9** : $\frac{2\hbar c}{\Delta m^2 c^4} E \approx \frac{40 \text{ km} \cdot \text{MeV}^{-1}}{2\pi} \times 4 \text{ MeV}$ soit $\frac{2\hbar c}{\Delta m^2 c^4} E \approx 25 \text{ km}$

On pose $u = \arccos(0,8)$, d'où : $\sin u = \sqrt{0,36}$ et $u \approx 0,6 \text{ rad}$

Finalement : $l \geq 15 \text{ km}$

11) Aucune oscillation n'est détectée à moins de 1 kilomètre (les premiers points d'observation). Par contre, les conséquences de l'oscillation sont observées à environ 150 km. La probabilité de l'état électronique est alors environ égale à 0,6.

Ces résultats sont compatibles avec la valeur $\Delta m^2 c^4 = 6.10^{-17} \text{ MeV}^2$ déduite de la **figure 1** (**Q9**) et $E = 4 \text{ MeV}$:

	$l = 1 \text{ km}$	$l = 150 \text{ km}$
$\frac{l}{E} (\text{km} \cdot \text{MeV}^{-1})$	0,25	≈ 40
$P_e \left(\frac{l}{E} \right)$	≈ 1 (déduit de Q8 ou de $l \ll l_{\min}$)	0,6 (figure 1)

¹ On trouve $7,6.10^{-5} \text{ eV}^2 = 7,6.10^{-17} \text{ MeV}^2$ sur wikipedia !

12) Pour des neutrinos d'énergie 4 MeV, la période spatiale d'oscillation de la probabilité de la saveur électronique est de l'ordre de 150 km, très faible devant la distance moyenne entre le Soleil et la Terre.

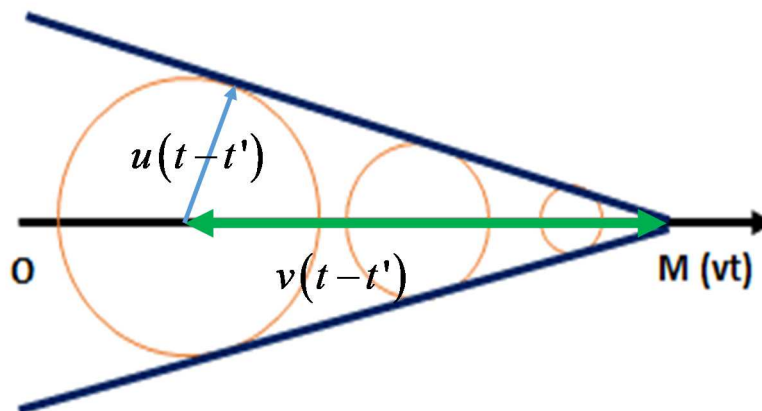
Les neutrinos détectés sont émis au coeur du Soleil, dans une région de dimension caractéristique largement supérieure à 150 km. De plus, ces neutrinos sont détectés sur Terre dont la rotation propre provoque des variations diurnes de la distance entre le détecteur et un « point source »

On s'attend donc à une probabilité moyenne de la saveur électronique **proche de $\frac{1}{2}$** .

II- Effet Tcherenkov

II-1 Répartition spatiale du rayonnement Tcherenkov

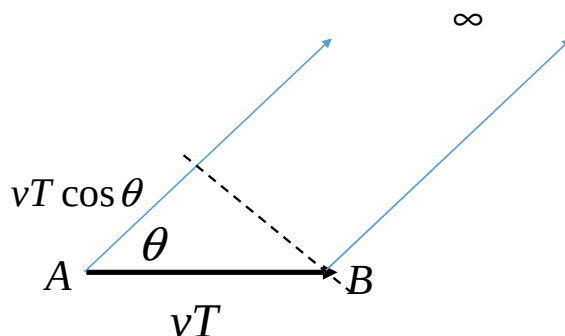
13) Considérons la particule initialement en O, origine de l'axe (Ox) selon lequel elle se déplace à la vitesse constante v . A l'instant $t > 0$, elle est ainsi à l'abscisse vt . L'onde émise en $t' \in [0, t]$ correspond à un front d'onde sphérique de rayon $u(t-t')$ et centré sur le point d'abscisse vt' .



Toutes les sphères ainsi définies en faisant varier t' sur $[0, t]$ sont contenues dans un cône dont le sommet a pour abscisse vt et dont le demi-angle au sommet est $\alpha = \arcsin\left(\frac{u(t-t')}{vt - vt'}\right)$, soit :

$$\boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{u}{v}\right)}$$

14) Sur une période T , la particule se déplace de vT .



On en déduit : $(A^\infty) - (B^\infty) = vT \cos \theta$

Les ondes émises respectivement en A et B atteignent l'observateur en phase, si :

$$\frac{vT \cos \theta}{u} = pT \quad \text{où} \quad p \in \mathbb{Z}$$

D'où : $\cos \theta = p \frac{u}{v}$

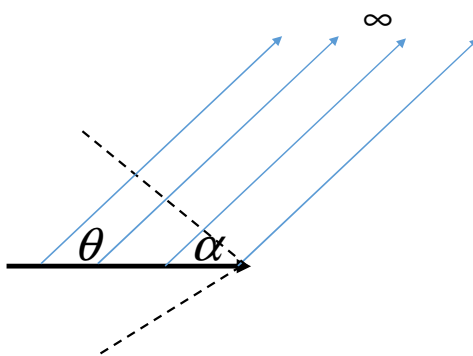
Le cas $p = 0$ correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Pour $p = 1$:

$$\cos \theta = \frac{u}{v}$$

La vitesse de la particule est inférieure à c et si le milieu a un indice proche de celui de l'eau, $u \approx \frac{3}{4}c$, si bien qu'un entier $p > 1$ ne peut pas être retenu.

15) Le « front d'onde » formé par le cône (Q13) est orthogonal à la direction de propagation identifiée dans Q14, en accord avec le **théorème de Malus**.



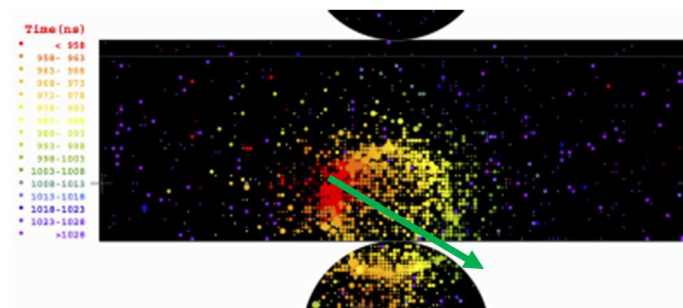
16) On déduit de **Q14** :

$$\cos \theta = \frac{3}{4}$$

L'angle est proche de $\frac{\pi}{4}$.

17) Les points rouges correspondent aux premiers détecteurs atteints, donc ceux qui sont les plus proches de la collision neutrino / eau. Cette collision a lieu dans cette tache rouge.

L'électron rayonne devant lui dans des directions formant un cône de demi-angle au sommet θ . Cette lumière éclaire des détecteurs différents au même instant, ce qui est reflété par des points de même couleur. La trajectoire de l'électron passe par le centre de ces points, d'où l'allure ci-dessous :



18) Pour l'angle d'émission maximal, on suppose que la vitesse de la particule vaut quasiment c . On a alors :

$$\cos \theta_{\max} = \frac{u}{c}$$

Soit :

$$\cos \theta_{\max} = \frac{1}{n}$$

$\theta_{\max}$ étant faible (en radians, **figure 4**) :

$$\cos \theta_{\max} \approx 1 - \frac{\theta_{\max}^2}{2}$$

Posons $n = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) :

$$\frac{1}{n} \approx 1 - \varepsilon$$

On en déduit :

$$\varepsilon \approx \frac{\theta_{\max}^2}{2}$$

Ainsi, dans ce détecteur :

$$n - 1 \approx 10^{-3}$$

Cette valeur est beaucoup plus faible que dans l'eau (0,33), mais plus élevée que dans l'air (environ 3 fois plus).

Pour être détectée, une particule doit avoir une vitesse minimale :

$$\frac{c}{n} \simeq (1 - \varepsilon) c \quad \text{soit} \quad \frac{c}{n} \simeq 0,999c$$

Cette détection ne concerne donc que des particules de vitesses très proches de celle de la lumière dans le vide.

II-2 Spectre du rayonnement Tcherenkov

19) La puissance rayonnée par unité de pulsation a pour dimensions :

$$[P(\omega)] = ML^2T^{-2}$$

Par ailleurs, on déduit de l'énergie d'interaction électrostatique entre deux charges :

$$\left[\frac{q^2}{\varepsilon_0} \right] = ML^3T^{-2}$$

De plus :

$$\left[\frac{\omega}{c} \right] = L^{-1}$$

On peut donc proposer à un facteur numérique K près :

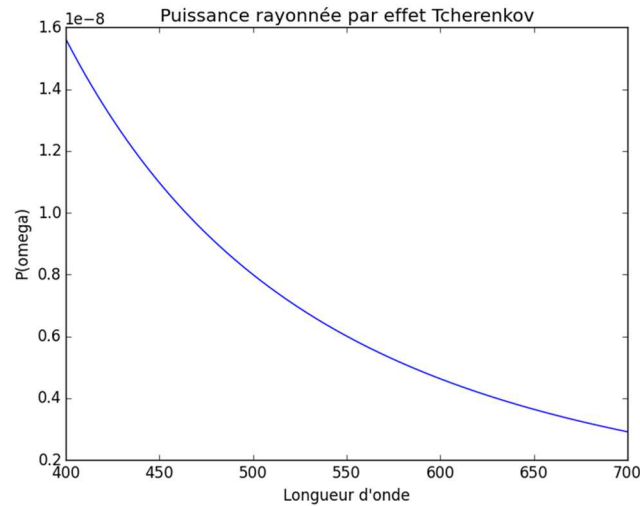
$$P(\omega) = K \frac{q^2 \omega}{\varepsilon_0 c}$$

20) Notons $P_\lambda(\lambda)$ la puissance rayonnée par unité de longueur d'onde. L'intervalle de longueur d'onde $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ contribue pour la puissance $P_\lambda(\lambda) d\lambda$.

Il correspond aussi à l'intervalle de pulsation $\left[\frac{2\pi c}{\lambda + d\lambda}, \frac{2\pi c}{\lambda} \right]$ soit à l'ordre 1 $\left[\frac{2\pi c}{\lambda} \left(1 - \frac{d\lambda}{\lambda} \right), \frac{2\pi c}{\lambda} \right]$, de largeur $d\omega = 2\pi c \frac{d\lambda}{\lambda^2}$ et qui contribue à la puissance pour $P(\omega) d\omega$

On en déduit :

$$P_\lambda(\lambda) = K \frac{4\pi^2 q^2 c}{\varepsilon_0 \lambda^3}$$



Cette densité spectrale est d'autant plus élevée que la longueur d'onde est courte. En se limitant au domaine visible, le rayonnement Tcherenkov apparaît donc **bleu**.



Radiation Tcherenkov dans le cœur de l'Advanced Test Reactor
(source : wikipedia)

21) La puissance rayonnée dans l'intervalle de longueurs d'onde $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ est $P_\lambda(\lambda) d\lambda$. Elle résulte de photons ayant chacun une énergie $\frac{hc}{\lambda}$, ce qui correspond au nombre suivant de photons par unité de temps :

$$\frac{P_\lambda(\lambda) d\lambda}{\frac{hc}{\lambda}} = K \frac{4\pi^2 q^2 c}{\epsilon_0 hc \lambda^2} d\lambda$$

Le nombre de photons émis par unité de temps entre les longueurs d'onde λ_1 et λ_2 est ainsi :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} K \frac{4\pi^2 q^2 c}{\epsilon_0 hc \lambda^2} d\lambda$$

La particule, de vitesse quasiment égale à c , parcourt la distance D en la durée $\frac{D}{c}$, d'où :

$$N_\gamma = K \frac{2\pi q^2}{\epsilon_0 \hbar c} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) D$$

22) On retient $\lambda_1 = 400nm$ et $\lambda_2 = 800nm$, d'où :

$$N_\gamma \simeq 2\pi \times 10^{-1} \left(\frac{1}{0,4} - \frac{1}{0,8} \right) \times 10^6 \times 5.10^{-2} \quad \text{soit} \quad \boxed{N_\gamma = 4.10^4}$$

II-3 Polarisation du rayonnement Tcherenkov

23) La particule se déplace à la vitesse constante $\vec{v}$. La densité de courant qui lui est associée est donc une fonction de $\vec{r} - \vec{v}t$.

24) On considère :
$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{j}(\omega) \exp(i(\vec{k}(\omega) \cdot \vec{r} - \omega t)) d\omega$$

A la position de la particule :
$$\vec{j}(\vec{r} = \vec{v}t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{j}(\omega) \exp(i(\vec{k}(\omega) \cdot \vec{v} - \omega)t) d\omega$$
 est indépendant du temps.

On en déduit :

$$\boxed{\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}}$$

25) Dans ce milieu d'indice n , on remplace ϵ_0 par $n^2 \epsilon_0$, d'où la relation de dispersion :

$$\boxed{k = n \frac{\omega}{c}}$$

26) De Q24 on déduit :
$$\omega = kv \cos \theta$$

De Q25 :
$$\omega = \frac{kc}{n}$$
 soit
$$\omega = ku$$
 en notant u la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu.

On retrouve donc la relation :

$$\boxed{\cos \theta = \frac{u}{v}}$$

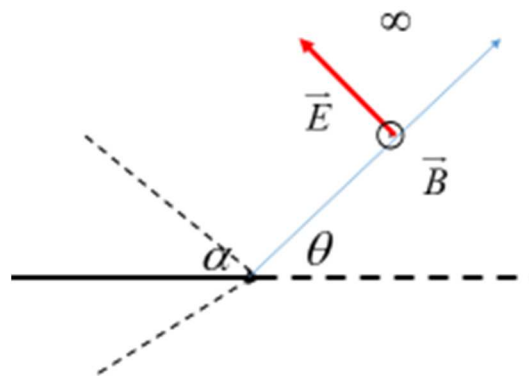
de Q14.

27) On considère le champ électromagnétique en un point M n'appartenant pas à l'axe $(O\vec{v})$ sur lequel la particule se déplace.

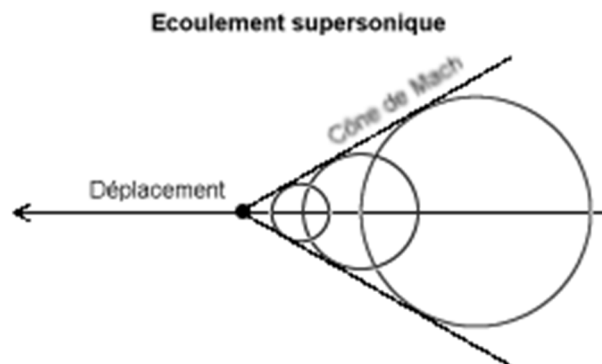
Le plan contenant $(\vec{Ov})$ et M est un plan de symétrie de la distribution des sources (charge et courant), donc du champ électrique, lequel est dans ce plan. Le champ électrique étant par ailleurs transverse, il est selon une demi-droite du cône de rayonnement.

Le plan contenant $(\vec{Ov})$ et M est un **plan d'antisymétrie** du champ magnétique, lequel est donc orthogonal à ce plan.

Le rayonnement Tcherenkov est polarisé rectilignement.



28) L'analogue acoustique de l'effet Tcherenkov est une **onde de choc** résultant d'une source se déplaçant à une vitesse supersonique (le « bang » d'un avion supersonique).



L'onde acoustique a cependant une polarisation longitudinale.