

Nicolas CHOIMET
PSI* Eiffel Bordeaux
nicolas.choimet@live.fr

I : Caractérisations et traitements

[1] ① le réseau cristallin est stable : l'énergie potentielle d'interaction $U(a)$ présente un minimum pour $a=a_0$, en l'absence de traction.

→ Au voisinage de a_0 , on peut donc développer $U(a)$ à l'ordre 2 :

$$U(a) = \underbrace{U(a_0)}_{U_0} + (a-a_0) \underbrace{\left(\frac{dU}{da}\right)_{a_0}}_0 + \frac{(a-a_0)^2}{2} \underbrace{\left(\frac{d^2U}{da^2}\right)_{a_0}}_{>0 \text{ (minimum)}} + \dots$$

$$\text{soit } U(a) = U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{da^2} \right)_{a_0} (a-a_0)^2 + o((a-a_0)^2)$$

→ cela n'est valable que dans l'approximation petites déformations : $|a-a_0| \ll a_0$.

② l'énergie est bien de la forme :

$$U(a) = U_0 + \frac{1}{2} k \underbrace{(a-a_0)^2}_{\text{allongement}} + \dots$$

$$\text{où } k = \left(\frac{d^2U}{da^2} \right)_{a_0} > 0$$

[2] ① A la limite de la rupture, $N \times \frac{1}{2} k (a-a_0)^2 \geq \gamma S$

or $N \approx \frac{S}{a_0^2}$ d'où $\frac{k(a-a_0)^2}{2} \geq \gamma a_0^2$

- ② A l'équilibre, le principe des actions réciproques appliqué de proche en proche donne: $F = N \times k (a - a_0)$

$$\text{donc } F_{\max} = \frac{S}{a_0^2} k (a - a_0)_{\max} = \sqrt{2k\gamma} \frac{S}{a_0}$$

- ③ la loi de Hooke s'écrit: $\sigma = E \varepsilon$

où $\sigma = \frac{F}{S}$ et $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{L} \times \frac{L}{a_0} \times (a - a_0)$
nbre de "couches"

$$\text{donc } F = E S \left(\frac{a - a_0}{a_0} \right)$$

- le modèle précédent donne: $F = \frac{S}{a_0^2} k (a - a_0)$

En identifiant les deux, on obtient: $k = E a_0$

On en déduit: $F_{\max} = \sqrt{\frac{2 E \gamma}{a_0}} S$

- ④ Réseau CC (défini dans l'énoncé):

→ la maille contient $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{centre}}}{1} + 8 \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coins}}}{\frac{1}{8}} = 2$ atomes.

→ la masse volumique du fer est donnée par:

$$\rho = \frac{2 \times M}{N_A \cdot a_0^3} \quad \text{donc } a_0 = \left(\frac{2M}{\rho N_A} \right)^{1/3}$$

A.N.: $a_0 \approx 300 \text{ pm}$

$F_{\max} \approx 300 \text{ kN}$

- ⑤ Avec la valeur numérique précédente, on trouve

$$\left(\frac{\Delta L}{L} \right)_{\max} = \left(\frac{a - a_0}{a_0} \right)_{\max} \approx 25\% !!! \text{ On n'est pas}$$

du tout dans le cadre des petites déformations

- le modèle est sûrement faux ...
 la section diminue → rupture plus précoce

- [6] La condition d'équilibre ^{en translation} de la portion de ressort s'écrit: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$. Si on néglige son poids devant la force $\vec{F}$,
 $\vec{F} + \vec{R}_{\text{inf} \rightarrow \text{sup}} = \vec{0}$ soit $\boxed{\vec{R}_{\text{inf} \rightarrow \text{sup}} = -\vec{F}}$ (3)

À l'équilibre, on doit aussi avoir $\sum \vec{M}_{\text{ext}} = \vec{0}$
 $\vec{M}_t$ or $\vec{M}_o(\vec{F}) = 0$

 donc $\vec{M}_t + \vec{M}_o(-\vec{F}) = \vec{0}$
 or $\vec{M}_o(-\vec{F}) = \ominus F \times \underbrace{\frac{D}{2} \vec{u}_\theta}_{\text{bras de levier}}$
 d'où $\boxed{\vec{M}_t = + F \frac{D}{2} \vec{u}_\theta}$

- [7] D'après la figure 4, $\boxed{ds \approx \frac{D}{2} d\alpha}$... mais je ne vois pas comment calculer $s = \int ds$ (ce qui s'avère inutile!).

puisque $d\ell = \frac{D}{2} d\theta$, on a donc: $\boxed{\frac{d\alpha \sim \frac{4}{D^2} ds}{d\ell \sim \frac{4}{D^2} d\theta}}$

or $M_t = G I_o \frac{d\alpha}{d\ell} = F \frac{D}{2}$

où $F = k s_{\text{tot}}$.

Donc $k s_{\text{tot}} \frac{D}{2} = G I_o \times \frac{4}{D^2} \frac{ds}{d\theta}$

soit $\frac{k D^3}{8 G I_o} d\theta = \frac{1}{s_{\text{tot}}} ds$ - En intégrant le

long du ressort (N spires): $\frac{k D^3}{8 G I_o} \times N \times 2\pi = \frac{1}{s_{\text{tot}}} \times s_{\text{tot}}$

$$\text{d'où } \boxed{k = \frac{G d^4}{8 N D^3}}$$

(4)

$$\boxed{8} \quad \boxed{k = \frac{G S^2}{8 \pi^2 N D^3} \approx 30 \text{ N.m}^{-1}}$$

[9] @ Considérons la masse P (!) de métal et $T(t)$, sa température (supposée uniforme) à t .

@ Appliquons lui le 1^{er} principe entre les instants t et $t + dt$:

$$dU = \delta Q^{\text{ext}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} dU = P_c dT \\ \delta Q^{\text{ext}} = -\alpha S (T - T_r) dt \end{cases}$$

$$\text{donc } P_c dT + \alpha S (T - T_r) dt = 0$$

$$\text{ou encore : } dt = - \frac{P_c}{\alpha S} \frac{dT}{T - T_r}$$

ce qu'on intègre entre l'entrée et la sortie du four :

$$\boxed{t = \frac{P_c}{\alpha S} \ln \left(\frac{T_r - T_i}{T_r - T_f} \right)}$$

$$\boxed{10} \quad V_0 = \frac{L}{t} \quad \text{où } t \propto \frac{P}{S}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{or } P = \rho V \propto \underline{d^2} \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \text{masse!} \\ S = S_{\text{lat}} \propto \underline{d} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \triangle \text{ c'est un cylindre} \\ \text{de diamètre } d \\ \text{donc } t \propto d \end{array}$$

$$\text{d'où } \boxed{V_0 \propto d^{-1}}$$

[11] Si la conduction thermique est le phénomène prépondérant, elle se fera radialement. Donc la distance caractéristique du phénomène est d. [5]

On soit par ailleurs que $\Delta t_{diff} \approx \frac{d^2}{D_{th}}$

où $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$ (en $m^2 \cdot s^{-1}$)

Or $V_0 = \frac{L}{\Delta t}$ donc $V_0 \propto d^{-2}$

[12] On n'est pas ici en régime permanent.

→ il faut comparer les 2 flux conductif :

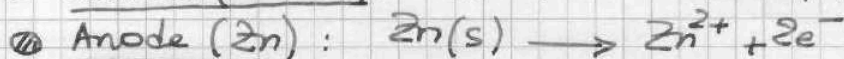
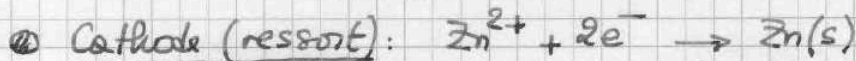
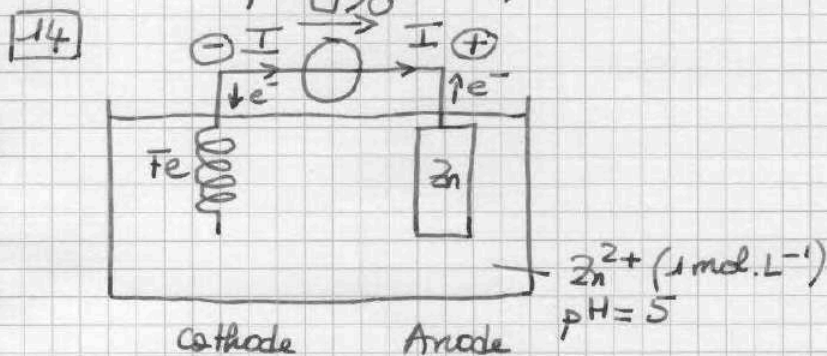
$$\varphi_{cd} = \left| \lambda \frac{dT}{dr} \right| \approx \lambda \frac{T_r - T}{d}$$

et conducto-convectif : $\varphi_{cc} \approx a (T_r - T)$

• si $(a \gg \frac{\lambda}{d})$: le phénomène est limité par la conduction (la conducto-convection n'est pas limitante) et c'est le modèle $V_0 \propto d^{-2}$ (cf. [11]) qui est le bon.

• si $(a \ll \frac{\lambda}{d})$: la conduction est beaucoup plus efficace que la conducto convection. Cette dernière est le phénomène qui pilote le comportement (car phénomène limitant) : c'est le modèle $V_0 \propto d^{-1}$ qui est le bon (cf. [10]).

- 13) ① revêtement complet de zinc: le zinc est soumis ^(uniforme) à la corrosion, et non le fer. Mais la surtension cathodique de l'eau sur Zn est plus élevée que sur Fe: quasi-blocage cinétique.
- ② si revêtement abîmé: Zn est corrodé (anode locale), l'eau (et/ou O_2) est réduite sur Fe (cathode locale) - C'est le principe d'une anode sacrificielle (corrosion différentielle).
- ③ Inconvénients formidables: diminution des performances mécaniques (inertie, élasticité) et thermiques (coefficients de dilatation différents pour Fe et Zn).



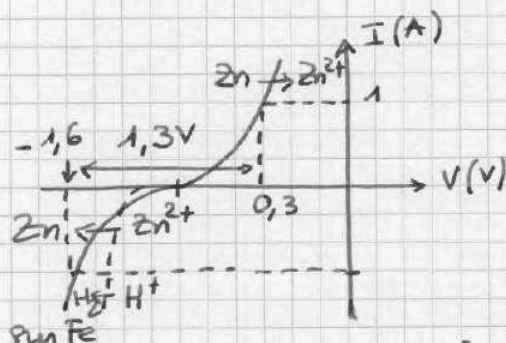
15) ① $dq = I dt$ or $dq = 2F d\xi$ (loi de Faraday)
 $= 2F \frac{dm}{M}$ nbre des spires

avec $dm = \rho S_{tot} \cdot dl$ de où $S_{tot} \approx N \times 2\pi \frac{D}{2} \times 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
 $= N \cdot 2D \sqrt{\pi^3 S}$ section du fil

d'où $\Delta t = \frac{4F\rho ND}{MI} \sqrt{\pi^3 S e}$

A.N. $\Delta t \approx 3 \text{ h}$

⑦ On lit :



Il ne faut évidemment pas oublier la chute ohmique

$$R_o I = 5 \text{ V.}$$

donc $U = 1,3 + 5 = 6,3 \text{ V}$

⑧ $W_{\text{elec}} = UI \Delta t \approx 70 \text{ kJ}$

16 ① le potentiel de Nernst du couple $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$ à $\text{pH}=5$ vaut $E = 0,00 - 0,06 \times 5 = -0,30 \text{ V}$.

② la vague cathodique de l'eau démarre donc

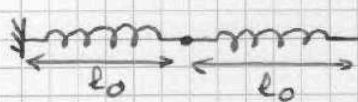
à $E + \eta_c = -0,95 \text{ V}$

→ elle est donc à droite de la vague cathodique de Zn^{2+} sur Fe, et parasitera donc l'électrolyse : le rendement faradique sera donc plus faible.

Partie II: Propagation d'ondes d'élongation dans un ressort.

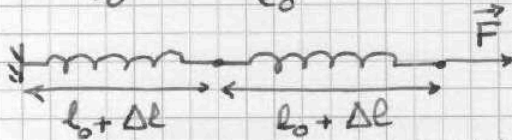
(8)

17



à vide

$$l_{eq} = 2l_0$$



$$\Delta l_{eq} = 2\Delta l$$

$$\text{et } F = k \Delta l = k_{eq} \Delta l_{eq}$$

$$\text{d'où } k_{eq} = \frac{k}{2}$$

Si on considère N ressorts en série, on a: $k_{eq} = \frac{k}{N}$

$$\text{or } l_{eq} = N l_0 \text{ donc } k_{eq} = k \cdot \frac{l_0}{l_{eq}} \propto \frac{1}{l_{eq}}$$

$$k_{eq} = \frac{\alpha}{l_{eq}} \text{ où } \alpha = k l_0$$

Pour un ressort hélicoïdal, $L_0 = N p$ (pas à vide)

$$\text{et, d'après [7], } k = \frac{G d^4}{8 N D^3} = \frac{\alpha}{L_0}$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{G d^4 p}{8 D^3}$$

18 Allongement de la tranche $[x, x+dx]$:

$$\underbrace{x + dx + \xi(x+dx, t) - (x + \xi(x, t))}_{\text{longueur hors équilibre}} - \underbrace{dx}_{\substack{\text{longueur} \\ \text{à vide}}}$$

$$\text{soit un allongement } \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) dx \text{ à l'ordre 1.}$$

la raideur de cette tranche vaut $k = \frac{\alpha}{dx}$
d'après [17]

sans se préoccuper du signe, la force s'exerçant à ses extrémités vaut $k \times \text{allong.} = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)$

⑩ Signe: Supposons l'allongement de la tranche positif: $\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t) > 0$.

→ la tranche exerce en x une force > 0 sur la partie "amont" (elle est allongée).
donc $F_{d \rightarrow g}(x,t) = + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)$.

→ d'après le principe des actions réciproques, la force demandée, $F_{g \rightarrow d}(x,t)$, vaut donc:

$$F(x,t) = F_{g \rightarrow d}(x,t) = - \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)$$

[19] ⑩ on applique le PFD à la tranche:

$$Sm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x,t) - F(x+dx,t)$$

$$\text{i.e. } \mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t) + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x+dx,t)$$

ce qui donne, à l'ordre 1:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\alpha} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\text{où } c = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_{\text{ressort}}}{l_0} \quad (\text{masse linéique})$$

[20] Les pertes énergétiques sur une période sont données par $E_f = \left| \int_0^T \vec{F}_f \cdot \vec{v} dt \right| = \hbar \int_0^T \dot{x}^2 dt = \hbar x_0^2 \omega^2 \underbrace{\int_0^T \sin^2 \omega t dt}_{T/2}$

$$\text{donc } E_f = \pi \hbar \omega x_0^2$$

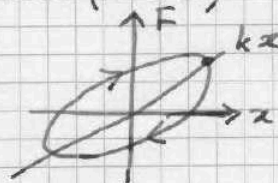
[21] ⑩ Les points d'intersection de l'ellipse et de la droite $F = kx$ correspondent aux extrêmes de x ($\dot{x} = 0$ en ces points).

⑩ Prenons le point d'intersection situé dans le premier ⁽¹⁰⁾ quadrant: il s'agit du maximum de x .

→ lorsque l'on s'approche de ce point, x augmente ($\dot{x} > 0$) donc $F = kx + h\dot{x} > kx$.

→ lorsque l'on s'en éloigne, x diminue ($\dot{x} < 0$) donc $F = kx + h\dot{x} < kx$.

Conclusion: l'ellipse est parcourue dans le sens horaire



[22] Calculons l'aire de l'ellipse:

$$\begin{aligned}
 A &= \oint F dx = \oint kx dx + \oint h\dot{x} dx \\
 &= \underbrace{\left[\frac{kx^2}{2} \right]_0^T}_{\substack{\text{RSF} \\ (RSF)}} + \underbrace{\int_0^T h\dot{x}^2 dt}_{E_f \text{ (cf [21])}}
 \end{aligned}$$

donc $E_f = \oint F dx$

[23] Il suffit d'identifier les expressions $E_{hys} = \pi \beta x_0^2$ et $E_{feg} = \pi h_{eq} \omega x_0^2$, ce qui donne

$$h_{eq} = \frac{\beta}{\omega}$$

[24] ⑩ Appliquons le PFD à la masse accrochée au ressort: $m\ddot{x} = -kx - h_{eq}\dot{x} + \underbrace{F_{exc}(t)}_{\text{excit. sinus.}}$

⑩ Comme cette équation est linéaire et qu'on est en RSF, on peut passer en complexes:

(11)

$$-m\omega^2 \underline{x} = - \underbrace{k \underline{x} - j\omega h_{eq} \underline{x}}_{- \underline{k} \cdot \underline{x}} + F_{exc} \quad \text{où } \underline{k} = k + j\omega h_{eq}$$

$$\text{soit } \boxed{\underline{k} = k + j\beta}$$

[25] ① L'équation de d'Alembert s'écrit, avec α complexe :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

② la relation de dispersion s'obtient en y réinjectant $\xi(x,t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}$:

$$-\omega^2 = \frac{\alpha}{\mu} (-k^2)$$

$$\text{soit } \boxed{k^2 = \frac{\mu}{\alpha_r + i\alpha_i} \omega^2 = \frac{\mu}{\alpha_r} \omega^2 \cdot \frac{1}{1 + i \frac{\alpha_i}{\alpha_r}}}$$

③ Comme $\alpha_i \ll \alpha_r$, on peut écrire à l'ordre 1 en $\frac{\alpha_i}{\alpha_r}$:

$$\boxed{K \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - i \frac{\alpha_i}{2\alpha_r} \right)} \quad \text{avec } \boxed{c = \sqrt{\frac{\alpha_r}{\mu}}}$$

[26] ④ $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} = c}$ à l'ordre le plus bas en $\frac{\alpha_i}{\alpha_r}$

→ v_φ est indépendante de ω : le milieu n'est pas dispersif.

⑤ les paquets d'ondes se propagent donc sans se déformer (mais en s'atténuant).

[27] La partie imaginaire de k s'écrit $k_i = -\frac{\omega \alpha_i}{c 2\alpha_r}$ (12)

→ Soit la distance d'atténuation $\delta \triangleq -\frac{1}{k_i}$

$$\boxed{\delta = \frac{c}{\omega} \cdot \frac{2\alpha_r}{\alpha_i} = \frac{2}{\omega \alpha_i} \sqrt{\frac{\alpha_r^3}{\mu}}}$$

L'onde s'écrit alors :

$$\xi(x,t) = \xi_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega(t - \frac{x}{c})}$$

$$\text{soit } \boxed{\xi(x,t) = \xi_0 e^{-x/\delta} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]}$$

Les pertes structurales (traduites par α_i) ont donc pour effet de produire une atténuation des ondes sur une distance typique δ d'autant plus courte que α_i est plus grande.

[28] L'excitation en créneaux, T -périodique, admet un DSF présentant un fondamental à $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et des harmoniques de pulsations $3\omega, 5\omega, 7\omega, \dots$

La distance d'atténuation δ varie en $\frac{1}{\omega}$.
 → les harmoniques de rangs élevés seront donc atténués sur des distances plus courtes que le fondamental.

Au bout d'une distance "assez" grande, il ne restera plus qu'une onde sinusoïdale (mais atténuée) : le fondamental, de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$. → Comportement forte-bas.

[29] • $A \exp i(\omega t - kx)$ = onde progressive vers les x croissantes. ⁽¹³⁾

$B \exp i(\omega t + kx)$ = onde progressive vers les x décroissantes.

• On réinjecte dans l'équation de d'Alembert ce qui donne :

$$-k^2 A - k^2 B = \frac{1}{c^2} (-\omega^2 A - \omega^2 B)$$

$$\text{soit } \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}, \text{ i.e. } \boxed{k = \frac{\omega}{c}} \text{ puisque}$$

k est pris > 0 ici.

[30] • $\boxed{\text{CL en } x=0}$: ressort fixé en $x=0$

$$\text{donc } \boxed{\xi(0, t) = 0} \quad \forall t$$

$$\text{ce qui donne } \boxed{A + B = 0}.$$

• $\boxed{\text{CL en } x=l_0}$: masse m oscillant (avec une amplitude $\ll l_0$)

→ PFD appliqué à la masse :

$$\boxed{m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(l_0, t) = F(l_0, t) = -\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(l_0, t)}$$

$$\text{soit } -m\omega^2 [Ae^{-ikl_0} + Be^{ikl_0}] = -\alpha [-ikAe^{-ikl_0} + ikBe^{ikl_0}]$$

• Or $B = -A$. Donc :

$$-m\omega^2 A \underbrace{[e^{-ikl_0} - e^{ikl_0}]}_{-2i \sin kl_0} = iK\alpha A \underbrace{[e^{-ikl_0} + e^{ikl_0}]}_{2 \cos kl_0}$$

[14]

soit $\tan(kl_0) = \frac{\alpha K}{m\omega^2}$ - Or $K = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$

donc $\boxed{\tan\left(\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \cdot \omega l_0\right) = \frac{\sqrt{\mu\alpha}}{m\omega}}$

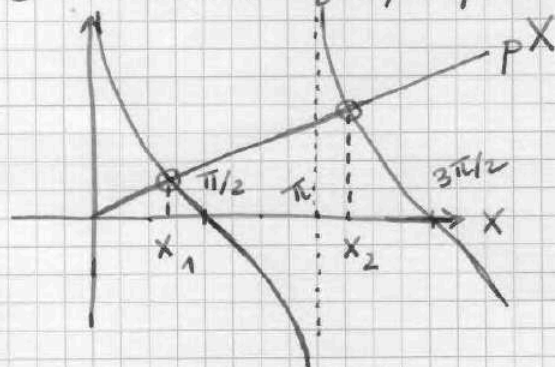
[31] @ Posons $X \hat{=} \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \cdot \omega l_0$ - d'équation précédente

se réécrit : $\tan X = \frac{\mu l_0}{m} \cdot \frac{1}{X} = \frac{m_{\text{ressort}}}{m} \cdot \frac{1}{X}$,

soit finalement $\boxed{\cotan X = \frac{m}{m_{\text{ressort}}} \cdot X = pX}$

p comme "pente"

③ Résolvons graphiquement cette équation :



On a bien une infinité (dénombrable) de solutions X_n ($n \in \mathbb{N}^*$)

(avec

$$X_n \in \left] (n-1)\pi, (n-1)\pi + \frac{\pi}{2} \right[)$$

[32] @ " l_0 « assez » petite" signifie " X « assez » petit" i.e. :

on se limite à la première solution X_1 avec

$X_1 \rightarrow 0$; alors $\cotan X \approx \frac{1}{X}$ (car $\tan X \approx X$)

donc $\frac{1}{X} \approx \frac{m}{\mu l_0} \cdot X$ soit $X^2 \approx \frac{\mu l_0}{m}$

i.e. $\frac{\mu}{\alpha} \omega^2 l_0^2 \approx \frac{\mu l_0}{m}$ ce qui donne :

$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{\alpha}{l_0 m} = \frac{k}{m}}$: ressort "simple".

[33] La résolution graphique montre que l'approximation [15] $X_1 \rightarrow 0$ signifie que la pente p de la droite pX est très grande: $p \gg 1$, soit $m \gg \mu l_0$

ce qui se traduit par $l_0 \ll \frac{m}{\mu}$ (ressort court)

ou $m_{\text{ressort}} \ll m$ (ressort de masse négligeable)

[34] On reprend la mise en équation de la question [19] en tenant compte du poids $-\mu dx g \vec{u}_x$ de la tranche:

$$\mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mu g dx - \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t) + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x+dx,t)$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - g}$$

[35] • A l'équilibre, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$

$$\text{donc } \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{g}{c^2} = \frac{\mu g}{\alpha}}$$

• On en déduit: $\xi_{\text{eq}}(x) = \frac{\mu g}{\alpha} \frac{x^2}{2} + Ax + B$

→ écrivons les C.L.:

• en $x=0$: $\xi_{\text{eq}}(0)=0$ donc $\boxed{B=0}$

• en $x=l_{\text{eq}} \approx l_0$: la force doit s'annuler (extrémité libre).

$$\text{donc } \frac{\partial \xi_{\text{eq}}}{\partial x}(l_0) = 0 = \frac{\mu g}{\alpha} l_0 + A$$

$$\text{d'où } \boxed{A = -\frac{\mu g}{\alpha} l_0}$$

On en déduit :

[16]

$$\xi_{eq}(x) = \frac{\mu g}{2\alpha} \left(\frac{x^2}{2} - x l_0 \right)$$

⑩ En $x = l_0$: $\xi_{eq}(l_0) = -\frac{\mu g}{2\alpha} l_0^2 = \Delta l_{eq} < 0$

→ Δl_{eq} est bien négatif : le ressort est comprimé sous l'effet de son propre poids

→ Si on néglige le poids du ressort ($\mu = 0$)
 $\Delta l_{eq} = 0$: c'est cohérent.

[36] Soit $\varepsilon(x, t) = \xi(x, t) - \xi_{eq}(x)$.

→ $\xi(x, t)$ vérifie : $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - g$ (cf. [34])

donc $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + 0 = c^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \underbrace{c^2 \frac{\partial^2 \xi_{eq}}{\partial x^2} - g}_{=0}$

donc $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$

[37] Pour $t < 0$, on maintient le ressort comprimé, au
repos. Donc $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(x, t < 0) = 0$ et $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}(x, t < 0) = 0$.

Par conséquent : $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = 0$ pour $t < 0$.

⑩ On en déduit : $\varepsilon(x, t < 0) = Ax + B$

avec les CL : $\varepsilon(0, t < 0) = 0$

$\varepsilon(l_0, t < 0) = -a$

donc $\varepsilon(x, t < 0) = -a \frac{x}{l_0}$

[38] ⑩ $\varepsilon(x,t) = f(x) \cos \omega t$ donne :

[17]

$$-\omega^2 f(x) \cos \omega t = c^2 (f''(x) \cos \omega t)$$

$$\text{soit } \boxed{f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0}$$

⑪ On en déduit : $f(x) = A \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) + B \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)$

→ CL en $x=0$: ressort au contact du support

$$\text{donc } \varepsilon(0,t) = 0 \Rightarrow \boxed{B=0}$$

→ CL en $x=l_0$: extrémité libre donc

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(l_0, t) = 0 \text{ ce qui donne :}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(l_0, t) = - \frac{d\varepsilon_{eq}(l_0)}{dx} = 0 \quad \uparrow \text{ cf. [35]}$$

$$\text{donc } \boxed{\cos\left(\frac{\omega l_0}{c}\right) = 0} \text{ soit}$$

$$\boxed{\omega = \frac{c}{l_0} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

⑫ Conclusion : $\varepsilon_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{\omega_n x}{c}\right) \cos(\omega_n t)$

$$\text{où } \omega_n = \frac{c}{l_0} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

[39] ✶ LINEARITÉ du problème garantit qu'on

puisse en chercher la solution en superposant

les modes propres $\varepsilon_n(x,t)$ déterminés ci-

dessus : $\varepsilon(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{\omega_n x}{c}\right) \cos(\omega_n t)$

→ la condition initiale nous donne les $\{A_n\}$.

[40] ⑩ On applique le PFD à l'extrémité inférieure [18]
du ressort (point de masse nulle) :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{masse nulle}}}{0} = +\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(0, t) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{réaction du support}}}{N}$$

$$\text{donc } N = -\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(0, t) = -\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(0, t) - \alpha \frac{d\xi_{eq}(0)}{dx}$$

$$\text{or } \frac{d\xi_{eq}(0)}{dx} = -\frac{\mu g l_0}{\alpha} \quad (\text{cf. [35]})$$

$$\text{d'où } \boxed{N = -\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(0, t) + \mu g l_0}$$

⑪ La condition de rupture du contact se traduit par l'annulation de la réaction N :

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial x}(0, t_d) = \frac{\mu g l_0}{\alpha}} \rightarrow \text{erreur de signe dans l'énoncé.}$$