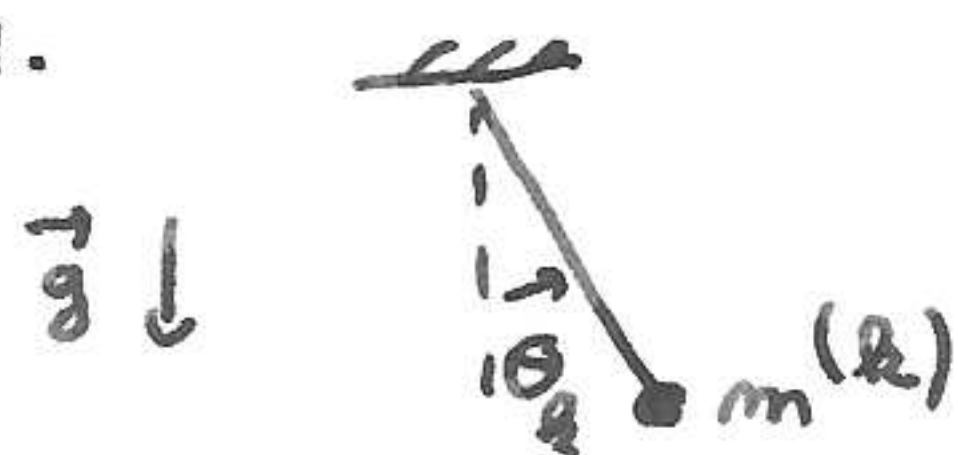


Préliminaire : tester le principe d'équivalence avec des pendules.

Q1.



Exprimez la période d'oscillation de la masse k , soumise à son poids et à la tension du fil dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$m_I^{(k)} \frac{d\vec{v}_k}{dt} = m_G^{(k)} \vec{g} + \vec{F}_k$$

En projection sur $\vec{e}_\theta$, on obtient $m_I^{(k)} l \ddot{\theta}_k = -m_G^{(k)} g \sin \theta_k \approx -m_G^{(k)} g \theta_k$

$$\text{d'où } \ddot{\theta}_k + \underbrace{\frac{g}{l} \frac{m_G^{(k)}}{m_I^{(k)}}}_{\omega_k^2} \theta_k = 0$$

$$\text{La période s'exprime par } T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \underbrace{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}_{T_0} \sqrt{\frac{m_I^{(k)}}{m_G^{(k)}}} = T_0 \sqrt{\frac{1}{\gamma_k + 1}}$$

Q2. Pour $|\gamma_k| \ll 1$, $T_k \approx T_0 \left(1 - \frac{1}{2} \gamma_k\right)$

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} = \frac{1 - \frac{1}{2} \gamma_1 - 1 + \frac{1}{2} \gamma_2}{2 + \gamma_1 + \gamma_2} = \frac{\frac{1}{2} (\gamma_2 - \gamma_1)}{2 + \underbrace{\gamma_1 + \gamma_2}_{\ll 2}} \approx \frac{1}{4} (\gamma_2 - \gamma_1) = -\frac{1}{4} \varepsilon_{1,2}$$

Q3. Pour espérer voir un décollage entre les deux pendules dû à la différence entre m_G et m_I , il aurait fallu attendre environ 10^{15} périodes, car

$|T_1 - T_2| \leq \frac{1}{2} T_0 |\varepsilon_{1,2}|$ avec $|\varepsilon_{1,2}| = 10^{-15}$. Cela est impossible car l'oscillateur s'amortit rapidement : on peut imaginer observer 1000 périodes mais pas plus. Le test du principe d'équivalence avec cette expérience peut espérer être fait à 10^{-3} près.

Q4. Dans le référentiel héliocentrique galiléen, la Terre est soumise à

$$\vec{F}_{S \rightarrow T} = - \frac{G M_G^{(S)} M_G^{(T)}}{r_T^3} \vec{r}_T \quad \vec{F}_{L \rightarrow T} = + \frac{G M_G^{(L)} M_G^{(T)}}{r^3} \vec{r} \quad \text{car } \vec{r} = \vec{r}_L - \vec{r}_T = \vec{r}_L$$

Ponc $M_I^{(T)} \vec{a}_T = - \mu_S \frac{M_G^{(T)}}{r_T^3} \vec{r}_T + \frac{G M_G^{(L)} M_G^{(T)}}{r^3} \vec{r}$

$$\vec{a}_T = - \mu_S \frac{M_G^{(T)}}{M_I^{(T)}} \frac{\vec{r}_T}{r_T^3} + \mu_L \frac{M_G^{(T)}}{M_I^{(T)}} \frac{\vec{r}}{r^3} = - \mu_S (\gamma_T + 1) \frac{\vec{r}_T}{r_T^3} + \mu_L (\gamma_T + 1) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

De façon analogue, on obtient pour la lune:

$$\vec{a}_L = - \mu_S (\gamma_L + 1) \frac{\vec{r}_L}{r_L^3} - \mu_T (\gamma_L + 1) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Q5. Puis, $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a}_L - \vec{a}_T = \mu_S \left(\frac{\vec{r}_T}{r_T^3} - \frac{\vec{r}_L}{r_L^3} \right) + \mu_S \left(\gamma_T \frac{\vec{r}_T}{r_T^3} - \gamma_L \frac{\vec{r}_L}{r_L^3} \right) - \underbrace{(\mu_T \gamma_L + \mu_L \gamma_T + \mu_L + \mu_T)}_{\mu^*} \frac{\vec{r}}{r^3}$

Q6. Si on néglige l'influence du soleil, les termes en μ_S peuvent être négligés,

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \mu^* \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{On définit } \vec{e}_n = \frac{\vec{r}}{r}, \text{ et } \vec{e}_\theta \perp \vec{e}_n \text{ dans le sens de rotation.}$$

Par un mouvement circulaire, l'accélération peut s'écrire $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = r_0 \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_n$

La projection sur $\vec{e}_\theta$ donne $\ddot{\theta} = 0$, donc $\dot{\theta} = cte$

et $v = r_0 \dot{\theta} = cte$. Le mouvement est donc uniforme, et $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - r_0 \omega_0^2 \vec{e}_n$ avec $\omega_0 = \dot{\theta}$

On obtient $- r_0 \omega_0^2 = - \frac{\mu^*}{r_0^2}$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu^*}{r_0^3}}$$

Q7. Si le principe d'équivalence est vérifié, $\mu^* = \mu_L + \mu_T$.

Une correction de μ^* modifie la valeur de ω_0 et de r_0 , mais ne les fait pas dépendre du temps.

Q8. Au cours de la rotation de la Terre autour du soleil $\vec{\pi}_T$ varie³ périodiquement, et $\vec{\pi}_L$ aussi car la lune tourne autour de la Terre.

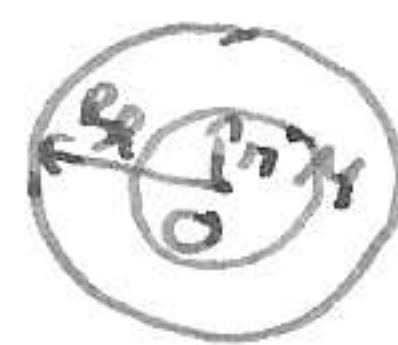
Le terme en μ_s varie donc périodiquement et perturbe donc périodiquement la trajectoire circulaire.

Q9. Par définition, $M_K = \int_V \rho_2(\vec{r}) d^3\vec{r}$, donc l'intégrale au dénominateur vaut $M_K c^2$, ce qui correspond à l'énergie de masse d'Einstein.

Q10. Au dénominateur, le terme intégré peut s'écrire $\frac{G dm(\vec{r}) dm(\vec{r}')}{d_{r,r'}}$, ce qui correspond à l'énergie potentielle gravitationnelle entre les 2 masses élémentaires. En intégrant on obtient l'énergie potentielle gravitationnelle d'interaction.

Q11. Analogie électrostatique : calculons le champ $\vec{E}$ créé par une boule chargée uniformément en volume en un point M situé à l'intérieur.

$$\oint_{\text{sphère rayon } r} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \vec{E} = E(r) \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \text{symétries et invariances}$$



$$4\pi r^2 E_2(r) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\rho_2 r}{3\epsilon_0} \quad \vec{E}_R = \frac{\rho_2 r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

$$\text{On en déduit } \vec{g}_2 = -4\pi G \frac{\rho_2 r}{3} \vec{e}_r \quad \text{car } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -G$$

$$\text{Puis } \vec{g}_2 = -g_2 \vec{e}_r \Rightarrow g_2 = -\frac{dI_2}{dr} \Rightarrow \frac{dI_2}{dr} = 4\pi G \frac{\rho_2 r}{3}$$

$$I_2(\vec{r}) = +4\pi G \frac{\rho_2 r^2}{3 \cdot 2} + c_0 = 2\pi G \rho_2 \frac{r^2}{3} + I_2(0)$$

$$I_2(0) = - \iiint_{\text{boule de rayon } R_2} G \rho \frac{d^3\vec{r}}{r} = - \int_{r=0}^{R_2} G \rho \frac{4\pi r^2}{r} dr = -G \rho 4\pi \frac{R_2^2}{2} = -G \rho 2\pi R_2^2$$

$$\text{On a donc bien } I_2(\vec{r}) = -2\pi G \rho_2 \left(R_2^2 - \frac{r^3}{3} \right)$$

Q12.

$$\iint_V G \frac{e_2(\vec{n}) e_2(\vec{n}')}{|\vec{n} - \vec{n}'|} d^3\vec{n} d^3\vec{n}' = \int_V (-I_2(\vec{n})) e_2(\vec{n}) d^3\vec{n}$$

$$= 4\pi e_2 \int_{n=0}^{R_2} -I_2(\vec{n}) n^2 dn = 4\pi e_2 \int_{n=0}^{R_2} + 2\pi G e_2 \left(R_2^2 - \frac{n^2}{3} \right) n^2 dn$$

$$= 8\pi^2 e_2^2 G \left(R_2^2 \frac{R_2^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{R_2^5}{5} \right) = \frac{8\pi^2 e_2^2 G R_2^5}{3 \cdot 5} = \frac{6}{5} G \frac{M_2^2}{R_2}$$

car $M_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3 e_2 \Rightarrow M_2^2 = \frac{16}{9} \pi^2 R_2^6 e_2^2$

On a donc bien $\gamma_2 = \gamma \frac{6}{5} \frac{G}{c^2} \frac{M_2}{R_2}$.

Q13. $\frac{\gamma_T}{\gamma} = \frac{6}{5} \cdot \frac{6,5 \cdot 10^{-11}}{9 \cdot 10^{16}} \cdot \frac{6,0 \cdot 10^{24}}{6,5 \cdot 10^6} \approx \frac{4}{5} \cdot 10^{-9} = 8 \cdot 10^{-10}$

$$\frac{\gamma_L}{\gamma} = \frac{6}{5} \frac{6,5 \cdot 10^{-11}}{9 \cdot 10^{16}} \frac{7,5 \cdot 10^{22}}{1,5 \cdot 10^6} = \frac{6 \cdot 6,5}{9} \cdot 10^{-11} \approx 4,5 \cdot 10^{-11}$$

Il y a un facteur 20 entre γ_L et γ_T , il est donc légitime de négliger le terme en γ_L .

Q14. $\vec{L} = \vec{n} \wedge M_{\oplus}^{(l)} \frac{d\vec{n}}{dt}$ est le moment cinétique de la lune dans R_g

$$\vec{L} = \vec{n} \wedge \frac{d\vec{n}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{n}}{dt} \wedge \frac{d\vec{n}}{dt}}_{\vec{0}} + \vec{n} \wedge \frac{d^2\vec{n}}{dt^2} = \vec{n} \wedge \mu_s \gamma_T \frac{\vec{n}_T}{n_T^3}$$

D'après le schéma, $\vec{n}_T \wedge \vec{n} = n_T \wedge \sin \phi \wedge (-\vec{u}_3) = -n_T \wedge \sin \phi \vec{u}_3$

$$\text{d'où } \frac{d\vec{L}}{dt} = -\mu_s \gamma_T n \sin \phi \frac{1}{n_T^2} \vec{u}_3 = -\delta a n \sin \phi \vec{u}_3$$

$$[\vec{L}] = m^2 \cdot s^{-1}$$

$$[\delta a] = [\vec{L}] \cdot s^{-1} \cdot m^{-1} = m \cdot s^{-2} \text{ c'est une accélération.}$$

Si le principe d'équivalence est vérifié, le moment cinétique se conserve,

car $\delta a = 0$. Dans ce cas $\frac{d\vec{n}}{dt} \underset{\substack{\text{car rotation} \\ \text{ds le sens de } +\vec{u}_3 \\ \text{et } \phi \text{ croît dans l'autre sens.}}}{=} \pi_0 \omega_0 \vec{e}_\phi$ et $\vec{l} = \vec{n} \pi \frac{d\vec{n}}{dt} = \pi_0^2 \omega_0 \vec{u}_3$

Q15. En repart de l'équation du mouvement projetée sur $\vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{\pi}$

$$\frac{d^2 \vec{n}}{dt^2} \cdot \vec{e}_n = \frac{d^2 \pi}{dt^2} - \pi \dot{\phi}^2 = -\frac{\mu_0}{\pi^2} + \frac{\mu_s \pi_T}{\pi_T^2} \frac{\vec{n}_T}{\pi_T} \cdot \vec{e}_n$$

accél en polaires

$$\Rightarrow \frac{d^2 \pi}{dt^2} = \pi \dot{\phi}^2 - \frac{\mu_0}{\pi^2} + \delta a \cos \phi \quad \text{et} \quad l = \pi^2 \dot{\phi} \quad \text{donc} \quad \pi \dot{\phi}^2 = \frac{l^2}{\pi^3}$$

Q16. $\Phi_0(t) = (\omega_T - \omega_0)t = \Omega t$

Q17. Pour déterminer $\delta l(t)$, exploitons $\frac{d\vec{l}}{dt} = -\delta a \pi \sin \phi \vec{u}_3$

$$\frac{d(\vec{l}_0 + \delta \vec{l})}{dt} = -\delta a (\pi_0 + \delta \pi) \sin(\phi_0 + \delta \phi) \vec{u}_3 \quad . \quad \text{Or } \frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{0} \quad . \quad \text{On obtient}$$

$$\frac{d\delta \vec{l}}{dt} = -\delta a \pi_0 \sin \phi_0 \vec{u}_3 = -\delta a \pi_0 \sin(\Omega t) \vec{u}_3 \quad \text{à l'ordre le + bas.}$$

$$\Rightarrow \delta \vec{l} = \frac{\delta a \pi_0}{\Omega} \cos \Omega t \vec{u}_3$$

On peut ensuite faire le développement perturbatif de l'équation de Q15.

$$\frac{d^2 \delta \pi}{dt^2} = \frac{(\pi_0 + \delta \pi)^2}{(\pi_0 + \delta \pi)^3} - \frac{\mu_0}{(\pi_0 + \delta \pi)^2} + \delta a \cos(\phi_0 + \delta \phi)$$

$$= \frac{\pi_0^2}{\pi_0^3} \frac{(1 + 2\frac{\delta \pi}{\pi_0})}{(1 + 3\frac{\delta \pi}{\pi_0})} - \frac{\mu_0}{\pi_0^2 (1 + \frac{\delta \pi}{\pi_0})^2} + \delta a \cos \phi_0 \quad . \quad \text{Or } \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi_0^3}} \quad \text{par le mot circulaire}$$

$$= \frac{\pi_0^2}{\pi_0^3} \left(1 + \frac{2\delta \pi}{\pi_0}\right) \left(1 - 3\frac{\delta \pi}{\pi_0}\right) - \omega_0^2 \pi_0 \left(1 - 2\frac{\delta \pi}{\pi_0}\right) + \delta a \cos \phi_0 \quad . \quad \pi_0 = \pi_0^2 \omega_0 \Rightarrow \frac{\pi_0^2}{\pi_0^3} = \pi_0 \omega_0$$

$$= \frac{\pi_0^2}{\pi_0^3} + \frac{2\delta \pi \pi_0}{\pi_0^3} - 3\frac{\pi_0^2}{\pi_0^4} \delta \pi - \omega_0^2 \pi_0 + 2\omega_0^2 \delta \pi + \delta a \cos \phi_0$$

$$= \cancel{\pi_0 \omega_0^2} + \frac{2}{\pi_0} \delta \pi \omega_0 - 3\omega_0^2 \delta \pi - \cancel{\omega_0^2 \pi_0} + 2\omega_0^2 \delta \pi + \delta a \cos \phi_0$$

$$\frac{d^2 \delta l}{dt^2} = \frac{2}{\pi_0} \omega_0 \delta l - \omega_0^2 \delta l + \delta a \cos(\Omega t), \text{ et } \delta l = \frac{\delta a \pi_0}{\Omega} \cos \Omega t$$

6

$$\text{donc } \frac{d^2 \delta l}{dt^2} + \omega_0^2 \delta l = \delta a \cos \Omega t \left(+ \frac{2\omega_0}{\Omega} + 1 \right)$$

Q18. On reconnaît une équation d'oscillateur harmonique, avec un second membre sinusoïdal. Le second membre entraîne une oscillation à Ω , qui vient se superposer à la solution de l'équation homogène, d'oscillation à ω_0 .

$$\text{Q19. } \omega_T = \frac{2\pi}{365} \text{ et } \omega_0 = \frac{2\pi}{30} \text{ donc } \omega_T \ll \omega_0; \text{ et } \Omega \approx \omega_0$$

Déterminons la solution particulière en complexes: $\delta l = \delta l_0 e^{j(\Omega t)}$

$$\frac{d^2 \delta l_0}{dt^2} + \omega_0^2 \delta l_0 = 3 \delta a e^{j\Omega t}$$

$$-\Omega^2 \delta l_0 + \omega_0^2 \delta l_0 = 3 \delta a \Rightarrow \delta l_0 = \frac{3 \delta a}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{3 \delta a}{(\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega)}$$

$$\delta l_0 = \frac{3 \delta a}{2 \omega_0 \omega_T} = \frac{3}{2 \omega_0 \omega_T} \frac{\mu_s}{\pi_T^2} \gamma_T = \frac{3}{2 \omega_0 \omega_T} \frac{GM_G^{(s)}}{\pi_T^2} \frac{6}{5} \frac{GM_G^{(T)}}{c^2 R_T} \gamma$$

$$\delta l_0 = \gamma \frac{9}{5} \frac{GM_G^{(s)}}{c^2} \frac{GM_G^{(T)}}{\omega_0 \omega_T \pi_T^2 R_T} \quad \text{or } GM_G^{(T)} = \mu_0 = \omega_0^2 \pi_0^3$$

$$\delta l_0 = \gamma \frac{9}{5} \frac{GM_G^{(s)}}{c^2} \frac{\pi_0^3}{\pi_T^2 R_T} \frac{\omega_0}{\omega_T}$$

Q20. Les mesures précises de distance Terre-Lune sont faites par réflexion d'une impulsion laser sur un réflecteur déposé sur la Lune.

$$\text{Q21. } \frac{\delta l_0}{3} = \frac{9}{5} \frac{6.5 \cdot 10^{-11} \cdot 2.0 \cdot 10^{30}}{9 \cdot 10^{16}} \frac{64 \cdot 10^{15}}{(1.5)^2 \cdot 10^{16} \cdot 6.5 \cdot 10^3} \frac{365}{30} = \frac{73.64}{(1.5)^2 \cdot 15} \cdot 10^{-1}$$

$$\approx 5 \times 30 \times 10^{-1} \approx 15 \text{ m, semble donc mesurable.}$$

Q22. γ_T peut être lié à G_{No} par

$$\gamma_T = \frac{G_{\text{No}} \pi^2 2\omega_0 \omega_T}{3 G M_S} \quad d'au(\Delta\gamma_T) = \frac{\text{précision sur } G_{\text{No}}}{3} = \frac{2 \cdot 10^{-2} (1.5)^2 \cdot 10^{22} \cdot 2 \frac{2\pi}{30 \cdot 24 \cdot 3600} \cdot \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3600}}{3 \cdot 6.5 \cdot 10^{-11} \cdot 20 \cdot 10^{30}}$$

$$= 7 \cdot 10^{-14} \quad \text{à la machine}$$

On se rapproche de l'objectif des 10^{-15} ?

Partie II : fonctionnement de MICROSCOPE

Q23. La masse test k subit la force électrostatique et la force gravitationnelle.

$$\vec{F}_k = \sum dm_k \vec{g}(\vec{r}) + \vec{b}_{el,k}$$

$$= \int_{V_k} \rho_G^{(k)} d^3\vec{r} \vec{g}(\vec{r}) + \vec{b}_{el,k}$$

Le satellite est soumis à la force gravitationnelle, et aux forces électrostatiques exercées par les masses tests, qui sont égales à l'opposé des $\vec{b}_{el,k}$ d'après le principe des actions réciproques.

On a donc bien $\vec{F}_S = \int_{V_S} \vec{g}(\vec{r}) \rho_G^{(S)} d^3\vec{r} - \vec{b}_{el,1} - \vec{b}_{el,2}$

$$Q24. \frac{d^2 \vec{O}_S \vec{O}_K}{dt^2} = \vec{a}_K - \vec{a}_S = \frac{\vec{F}_k}{m_I^{(k)}} - \frac{\vec{F}_S}{m_I^{(S)}} = \frac{\int_{V_k} \rho_G^{(k)} \vec{g}(\vec{r}) d^3\vec{r}}{m_I^{(k)}} + \frac{\vec{b}_{el,k}}{m_I^{(k)}} - \frac{\int_{V_S} \rho_G^{(S)} \vec{g}(\vec{r}) d^3\vec{r}}{m_I^{(S)}} + \frac{\vec{b}_{el,1}}{m_I^{(1)}} + \frac{\vec{b}_{el,2}}{m_I^{(2)}}$$

Q25. En coordonnées cartésiennes, $\vec{g} = -\frac{\mu_T}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\mu_T x}{r^3} \right) = -\frac{\mu_T}{r^3} + \frac{3}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} x. \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{2x}{2r} = \frac{x}{r}$$

$$= -\frac{\mu_T}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}. \quad \text{Les autres calculs se font de façon similaire.}$$

$$Q26. \int_{V_R} \vec{g}(\vec{r}) e_G^{(R)} d^3\vec{r} = \int_{P \in V_R} \left(\vec{g}(O_S) + [T(O_S)] \vec{O_S P} \right) e_G^{(R)} d^3\vec{r}$$

Par définition du centre de gravité de la masse test k ,

$$\vec{O_S O_K} = \frac{\int_{P \in V_R} e_G^{(R)} d^3\vec{r} \vec{O_S P}}{m_G^{(R)}} \quad \text{et} \quad m_G^{(R)} = \int_{V_R} e_G^{(R)} d^3\vec{r}$$

$$\text{On a donc bien} \quad \int_{V_R} \vec{g}(\vec{r}) e_G^{(R)} d^3\vec{r} = m_G^{(R)} \left(\vec{g}(O_S) + [T(O_S)] \vec{O_S O_K} \right)$$

$$Q27. \frac{d^2 \vec{O_S O_K}}{dt^2} = \frac{\int_{V_R} \vec{g}(\vec{r}) e_G^{(R)} d^3\vec{r}}{m_I^{(R)}} + \frac{\vec{b}_{el,k}}{m_I^{(R)}} - \frac{\int_{V_S} \vec{g}(\vec{r}) e_G^{(S)} d^3\vec{r}}{m_I^{(S)}} + \sum_{j=1,2} \frac{\vec{b}_{el,j}}{m_I^{(S)}}$$

$$= \frac{m_G^{(R)}}{m_I^{(R)}} \left(\vec{g}(O_S) + [T(O_S)] \vec{O_S O_K} \right) - \frac{m_G^{(S)}}{m_I^{(S)}} \left(\vec{g}(O_S) \right) + \frac{\vec{b}_{el,k}}{m_I^{(R)}} + \sum_{j=1,2} \frac{\vec{b}_{el,j}}{m_I^{(S)}}$$

$$= \varepsilon_{k,5} \vec{g}'(O_S) + (1 + \gamma_k) [T(O_S)] \vec{O_S O_K} + \frac{\vec{b}_{el,k}}{m_I^{(R)}} + \sum_{j=1,2} \frac{\vec{b}_{el,j}}{m_I^{(S)}}$$

Q28. Annulons les accélérations dans II.4, et négligeons γ_k .

$$0 = \varepsilon_{1,5} \vec{g}'(O_S) + [T(O_S)] \vec{O_S O_1} + \vec{b}_{el,1} + \sum_{j=1,2} \frac{\vec{b}_{el,j}}{m_I^{(S)}} \quad (1)$$

$$0 = \varepsilon_{2,5} \vec{g}'(O_S) + [T(O_S)] \vec{O_S O_2} + \vec{b}_{el,2} + \sum_{j=1,2} \frac{\vec{b}_{el,j}}{m_I^{(S)}} \quad (2)$$

Soustraction (2) - (1)

$$0 = \varepsilon_{2,1} \vec{g}'(O_S) + [T(O_S)] \vec{O_1 O_2} + \vec{b}_{el,2} - \vec{b}_{el,1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{b}_{el,1} - \vec{b}_{el,2}}_{\delta \vec{P}} = \varepsilon_{2,1} \vec{g}'(O_S) + [T(O_S)] \vec{\Delta}$$

Q29. $\vec{g}'(O_S) \cdot \vec{e}_x = g_x$ varie périodiquement à la pulsation Ω_S , donc

$\delta P_x = \varepsilon_{2,1} g_x$ également, si $\varepsilon_{2,1} \neq 0$ (violation du ppv d'équivalence)

$$Q30. T_{xx} = -\frac{\mu_T}{r^3} \left(1 - 3\frac{x^2}{r^2} \right) \quad T_{xy} = \frac{3\mu_T}{r^5} xy \quad T_{xz} = \frac{3\mu_T}{r^5} xz$$

On suit le centre de gravité du satellite en mouvement circulaire, donc

$$x = r_s \cos(\Omega_s t) \quad y = 0 \quad z = -r_s \sin(\Omega_s t)$$

$$T_{xx}(O_s) = -\frac{\mu_T}{r_s^3} \left(1 - 3\cos^2(\Omega_s t) \right) \quad T_{xz} = -\frac{3\mu_T}{r_s^3} \cos(\Omega_s t) \sin(\Omega_s t)$$

Un mauvais alignement fait donc varier Γ_x à une fréquence $2\Omega_s$, double de celle due à la violation du principe d'équivalence.

Q31. Plaçons nous en $\theta'_s = 0$ pour comparer FO_s et $F'O_s$

$$FO_s - F'O_s = \frac{p}{1-e} - \frac{p}{1+e} = \frac{p(1+e) - p(1-e)}{1-e^2} = \frac{2pe}{1-e^2} \approx 2pe$$

$$\text{Pour } e=0, r_s^{(0)} = p$$

Comme $e \ll 1$, on a bien $2pe \ll p$, les foyers sont très proches.

$$r_s(\theta_s) \approx r'(\theta') \approx p(1 - e \cos \theta_s) \quad \text{car } e \ll 1 \\ \approx r_s^{(0)}(1 - e \cos \theta_s)$$

$$Q32. T_{xx}(O_s) = -\frac{\mu_T}{r_s^{(0)3} (1 - e \cos \theta_s)^3} (1 - 3\cos^2 \theta_s) = -\frac{\mu_T}{r_s^{(0)3}} (1 + 3e \cos \theta_s) (1 - 3\cos^2 \theta_s)$$

$$= -\frac{\mu_T}{r_s^{(0)3}} \left(1 - 3\cos^2 \theta_s + 3e \cos \theta_s - 9e \cos^3 \theta_s \right). \quad \text{Car } \cos^3 \theta_s = \frac{1}{4} (\cos 3\theta_s + 3\cos \theta_s)$$

$$\text{Termes oscillant à } \theta_{PE} = \frac{\Omega_s}{2\pi} : -\frac{\mu_T e}{r_s^{(0)3}} \left(3 - \frac{27}{4} \right) \cos \theta_s = \frac{+ \mu_T e}{r_s^{(0)3}} \frac{15}{4} \cos \theta_s$$

$$T_{xz} = -\frac{3\mu_T \cos \theta_s \sin \theta_s}{r_s^{(0)3} (1 - e \cos \theta_s)^3} = -\frac{3\mu_T}{r_s^{(0)3}} (1 + 3e \cos \theta_s) \cos \theta_s \sin \theta_s$$

$$= -\frac{3\mu_T}{r_s^{(0)3}} \cos \theta_s \sin \theta_s - \frac{9\mu_T e}{r_s^{(0)3}} \cos^2 \theta_s \sin \theta_s. \quad \text{Car } \cos \theta_s \sin \theta_s = \frac{\sin(2\theta_s)}{2} \\ \text{et } \sin^3 \theta_s = -\frac{1}{4} \sin 3\theta_s + \frac{3}{4} \sin \theta_s$$

$$\text{Termes oscillant à } \theta_{PE} : +\frac{27}{4} \frac{\mu_T e}{r_s^{(0)3}} \sin \theta_s$$

$$Q33. \delta \Gamma_x = \varepsilon_{2,1} g_x(\theta_s) + T_{xx}(\theta_s) \Delta x + \underbrace{T_{xy} \Delta y}_0 + T_{xz} \Delta z$$

gardons seulement les termes oscillant à θ_{PE} : avec $g_s = \frac{\mu_T}{n_s^{(0)^2}$

$$\delta \Gamma_x = \varepsilon_{2,1} g_s \cos \theta_s + \frac{15}{4} \frac{g_s^2}{n_s^{(0)}} \Delta x \cos \theta_s + \frac{27}{4} e \frac{g_s}{n_s^{(0)}} \Delta z \sin \theta_s$$

les coefficients obtenus ne correspondent pas...

Q34. $\vec{D} = \vec{O_1 O_2}$. La mise en orbite fait sans doute bouger un peu les centres de gravité avec la forte accélération. Une fois l'orbite lancée les capteurs électrostatiques doivent pouvoir réaliser la mesure.

Q35. Il faut que le terme $\frac{3e\Delta x}{2n_s^{(0)}}$ puisse être mesuré à 10^{-15} près (même moins)

$$\Rightarrow e = \frac{10^{-15} \cdot 2n_s^{(0)}}{3\Delta x} = \frac{10^{-15} \cdot 2 \cdot (700 + 6500) \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{-7}} = 0,03 \ll 1$$

La mise en orbite doit donc être précise et bien connue.

Q36. Il semble que le mot du centre de gravité du satellite ne change pas,

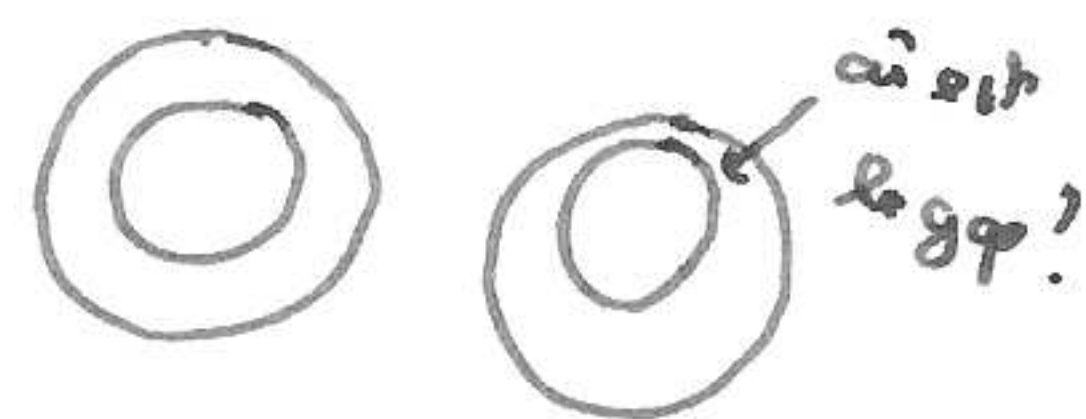
donc $\theta_{PE} = \frac{\Omega_s}{2\pi}$ à nouveau (correspond à la période de $\vec{g}(\theta_s)$)

Q37. Si les cylindres ne sont pas bien alignés, $\vec{O_1 O_2} \neq \vec{0}$ et T a ses composantes qui dépendent de l'orientation du satellite. Les fréquences d'oscillation sont des multiples de ω_n .

Q38. Intérêt : les fréquences dues aux erreurs d'alignement dépendent de la rotation sur lui-même du satellite, contrôlable lors de la mise en orbite. Il semble plus simple de choisir $\omega_n \gg \Omega_s$ pour bien pouvoir les distinguer.

Q39. Lors du déplacement selon x , les distances entre les électrodes ne varient pas, car elles sont toutes disposées sur des surfaces latérales de cylindres d'axe x . C'est donc une variation de S qui va induire une variation de capacité.

Q40. On suppose que les rayons des cylindres sont grands devant la variation de gap, afin de pouvoir définir le gap sans ambiguïté



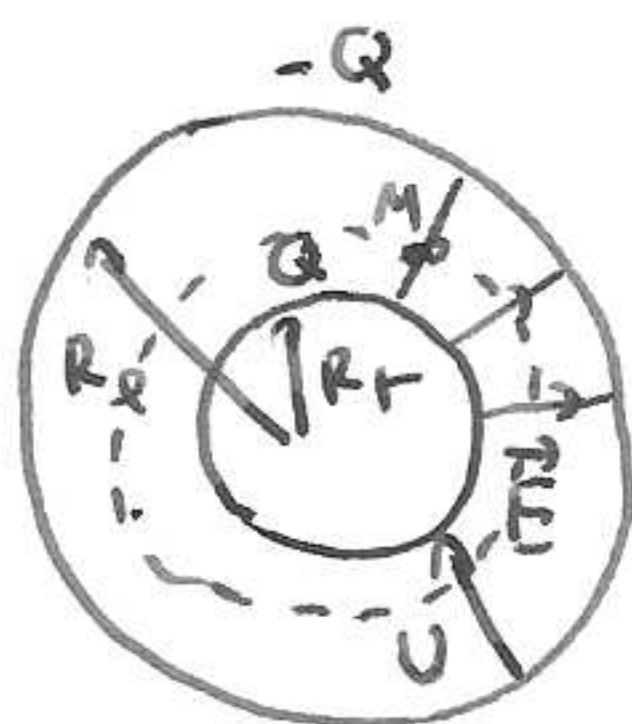
Q41. Pour un condensateur plan sans effets de bord,

la capacité est donnée par $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$. On a donc $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{e_1}$ et $C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{e_2}$. Relions e_1 et e_2 à x et e ; $e_2 = e - x$ et $e_1 = e + x$.

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{e+x} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{e-x}$$

$$\begin{aligned} Q42. \Delta C &= C_1 - C_2 = \epsilon_0 S \left(\frac{1}{e+x} - \frac{1}{e-x} \right) = \epsilon_0 S \left(\frac{1}{e(1+\frac{x}{e})} - \frac{1}{e(1-\frac{x}{e})} \right) \\ &= \frac{\epsilon_0 S}{e} \left(1 - \frac{x}{e} - \left(1 + \frac{x}{e} \right) \right) = -2 \frac{\epsilon_0 S}{e} \frac{x}{e} \\ &\quad \underbrace{\frac{\epsilon_0 S}{e}}_{C_0} \end{aligned}$$

Q43.



Les conducteurs étant supposés en influence totale, il y a une charge opposée sur chaque cylindre.

Le théorème de Gauss donne

$$2\pi n e E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi n e \epsilon_0}$$

La tension vaut $U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi n e \epsilon_0} dr = \frac{Q}{2\pi e \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{Q}{C}$ avec C la capacité.

On en déduit $C_1 = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ et $C_2 = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ avec $e_1 = e - x$ et $e_2 = e + x$ d'après le schéma.

$$\begin{aligned} \Delta C &= C_1 - C_2 = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} (e - x - e - x) = -2 \frac{2\pi \epsilon_0 e}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{x}{e} \\ &\quad \underbrace{\frac{2\pi \epsilon_0 e}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}_{C_0'} \end{aligned}$$

Rem: pb de signe

Q45. $\mathcal{E}_{p,i} = \frac{1}{2} C_i U_i^2$ avec $U_i = V_i - V_p$ constant.

$$d\mathcal{E}_{p,i} = \frac{1}{2} dC_i U_i^2$$

Q46. Le générateur fournit les $d\mathcal{E}_{p,i}$ emmagasinés par les condensateurs

$$d\mathcal{E}_g = \frac{1}{2} dC_1 U_1^2 + \frac{1}{2} dC_2 U_2^2$$

Q47. $\vec{\nabla} W(\vec{F}_{p \rightarrow i}) = \vec{F}_{p \rightarrow i} \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_i \cdot d\vec{r}$ car $\vec{F}_i$ est la force exercée par l'électrode i sur la masse test.
 $= -d\mathcal{E}_{p,i}$

Pour $\vec{F}_i \cdot d\vec{r} = d\mathcal{E}_{p,i} = \frac{1}{2} U_i^2 dC_i$

$$\Rightarrow \vec{F}_i = \frac{1}{2} U_i^2 \vec{\nabla} C_i$$

Q48. Méthode de variation d'aire:

la force totale subie par le cylindre de test est

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= \frac{1}{2} U_1^2 \vec{\nabla} C_1 + \frac{1}{2} U_2^2 \vec{\nabla} C_2 \\ &= \frac{1}{2} (U_x - V_p)^2 \frac{\partial C_1}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{1}{2} (-V_x - V_p)^2 \frac{\partial C_2}{\partial x} \vec{e}_x \\ &= \frac{1}{2} (V_x - V_p)^2 x \frac{-2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{e}_x + \frac{1}{2} (-V_x - V_p)^2 \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{e}_x \\ &= + \frac{2\pi\epsilon_0 4V_x V_p}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{e}_x \quad G_a = \frac{-2\pi\epsilon_0 4V_p}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) m_I^{(2)}} \quad \text{pb signe?} \end{aligned}$$

Q49. Même démarche pour la variation de gap, avec

$$C_1(x) = \frac{\epsilon_0 S}{e+x} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{e-x}$$

$$C_1'(x) = \frac{-\epsilon_0 S}{(e+x)^2} = -\frac{\epsilon_0 S}{e^2 \left(1 + 2\frac{x}{e}\right)} = -\frac{\epsilon_0 S}{e^2} \left(1 - 2\frac{x}{e}\right)$$

$$C_2'(x) = \frac{\epsilon_0 S}{(e-x)^2} = \frac{\epsilon_0 S}{e^2 \left(1 - 2\frac{x}{e}\right)} = \frac{\epsilon_0 S}{e^2} \left(1 + 2\frac{x}{e}\right)$$

$$\vec{F}_{el,2} = \frac{1}{2} (V_x - V_p)^2 \frac{\epsilon_0 S}{e^2} \left(-1 + 2\frac{x}{e}\right) \vec{e}_x + \frac{1}{2} (V_x + V_p)^2 \frac{\epsilon_0 S}{e^2} \left(1 + 2\frac{x}{e}\right) \vec{e}_x$$

$$= (V_x^2 + V_p^2) \frac{\epsilon_0 S}{e^2} \frac{2x}{e} \vec{e}_x + 2V_x V_p \frac{\epsilon_0 S}{e^2} \vec{e}_x$$

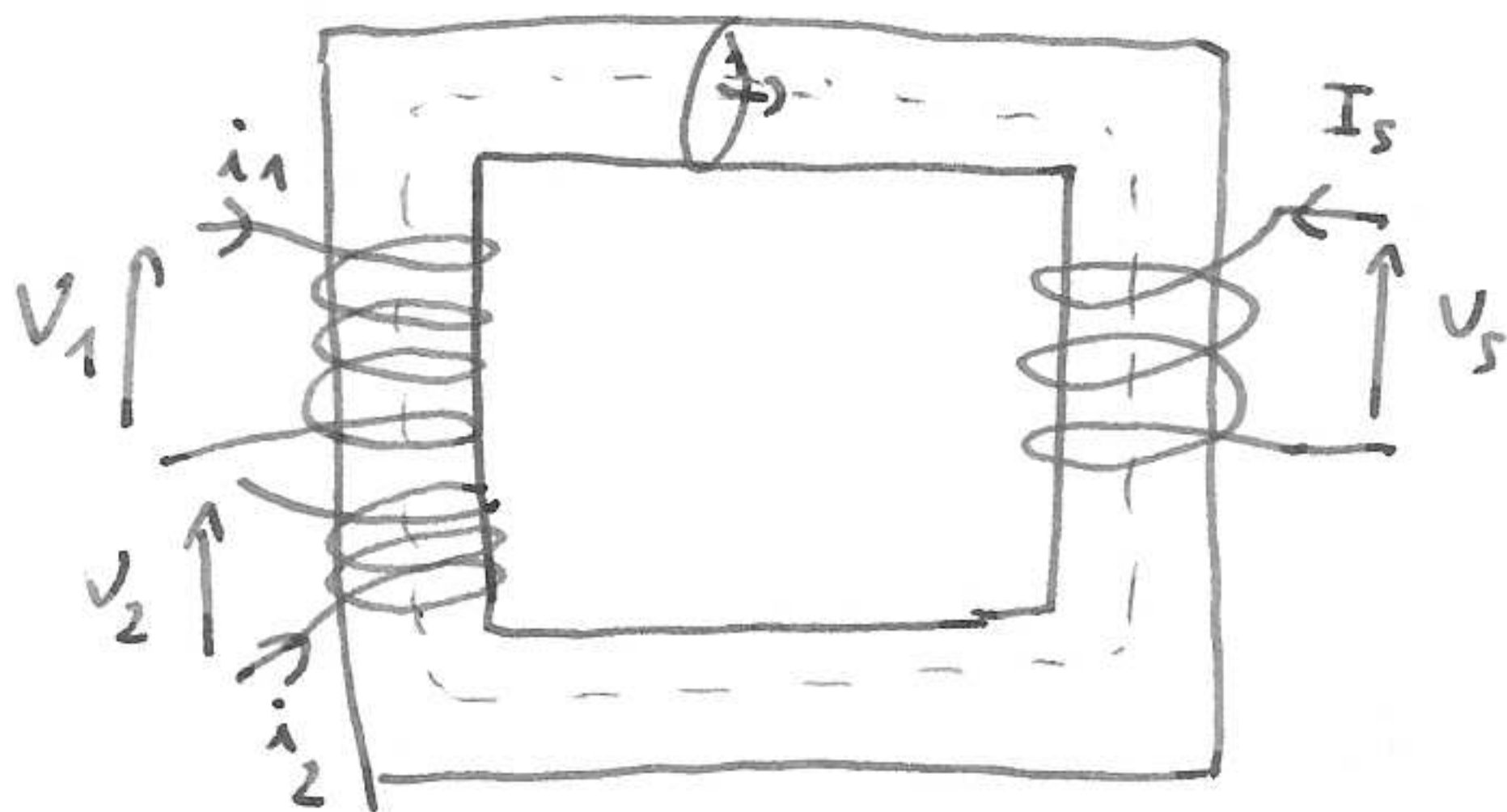
$$= \frac{2\epsilon_0 S}{e^3} V_p^2 \left(1 + \left(\frac{V_x}{V_p}\right)^2\right) x \vec{e}_x + 2V_x V_p \frac{\epsilon_0 S}{e^2} \vec{e}_x$$

$$\omega_p^2 = \frac{2\epsilon_0 S}{e^3 m_I^{(2)}} V_p^2$$

$$G_g = \frac{-2V_p \epsilon_0 S}{e^2 m_I^{(2)}}$$

Q50. $\frac{G_g}{V_p} = \frac{2 \epsilon_0 S}{a^2 m_c}$ avec $S = \frac{\pi}{2} R^2 h(1) = \frac{\pi}{2} 0,2 \cdot 0,4 = 0,13 \text{ m}^2$
 $\frac{1}{4}$ de tam, d'après fig 3.1.
 $= \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-12} \cdot 0,13}{(0,02)^2 \cdot 0,4} = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{V}^{-2}$

Q51.



On note Φ le flux
du champ magnétique à
travers une section.

$$\text{On a } V_s = m_s \frac{d\Phi}{dt}$$

$$V_1 = m_p \frac{d\Phi}{dt}$$

$$V_2 = m_p \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{V_s}{m_s} = \frac{V_1}{m_p} = \frac{V_2}{m_p}$$

le théorème d'Ampère sur la ligne de champ moyenne donne

$$Hl = m_p(i_1 - i_2) + m_s I_s \text{ et } H \rightarrow 0 \text{ par un milieu magnétique idéal.}$$

$$\Rightarrow m_p(i_1 - i_2) + m_s I_s = 0$$

Q52. Si ΔC varie à cause d'une accélération de la masse test, il y aura
d'autres fréquences dans V_x . De plus il peut y avoir du bruit électronique.

Q53. Des lais des mailles permettent d'écrire $\underline{V_d} = \underline{V_1} + \frac{\underline{i_1}}{jC_1\omega} = -\underline{V_2} + \frac{\underline{i_2}}{jC_2\omega}$

On $\underline{V_1} = \underline{V_2} = \underline{V_s}$ car $m_s = m_p$ et $\underline{i_1} = \underline{i_2} - \underline{I_s}$

$$\Rightarrow \underline{V_d} = \underline{V_s} + \frac{\underline{i_2} - \underline{I_s}}{jC_1\omega} = \underline{V_s} + \frac{1}{jC_1\omega} (jC_2\omega(\underline{V_d} + \underline{V_2}) - \underline{I_s}) = \underline{V_s} + \frac{C_2}{C_1}(\underline{V_d} + \underline{V_s}) - \frac{\underline{I_s}}{jC_1\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{V_d} \left(1 - \frac{C_2}{C_1}\right) = \underline{V_s} \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) - \frac{\underline{I_s}}{jC_1\omega} \Rightarrow \underline{V_d} = \underline{V_s} \frac{C_1 + C_2}{C_1 - C_2} - \frac{\underline{I_s}}{(C_1 - C_2)j\omega}$$

$$\underline{V_x} = \underline{V_d} \frac{C_1 - C_2}{C_0} = \underline{V_s} \frac{C_1 + C_2}{C_0} - \frac{\underline{I_s}}{j\omega C_0}$$

Q54. En supposant l'ALI idéal en régime linéaire

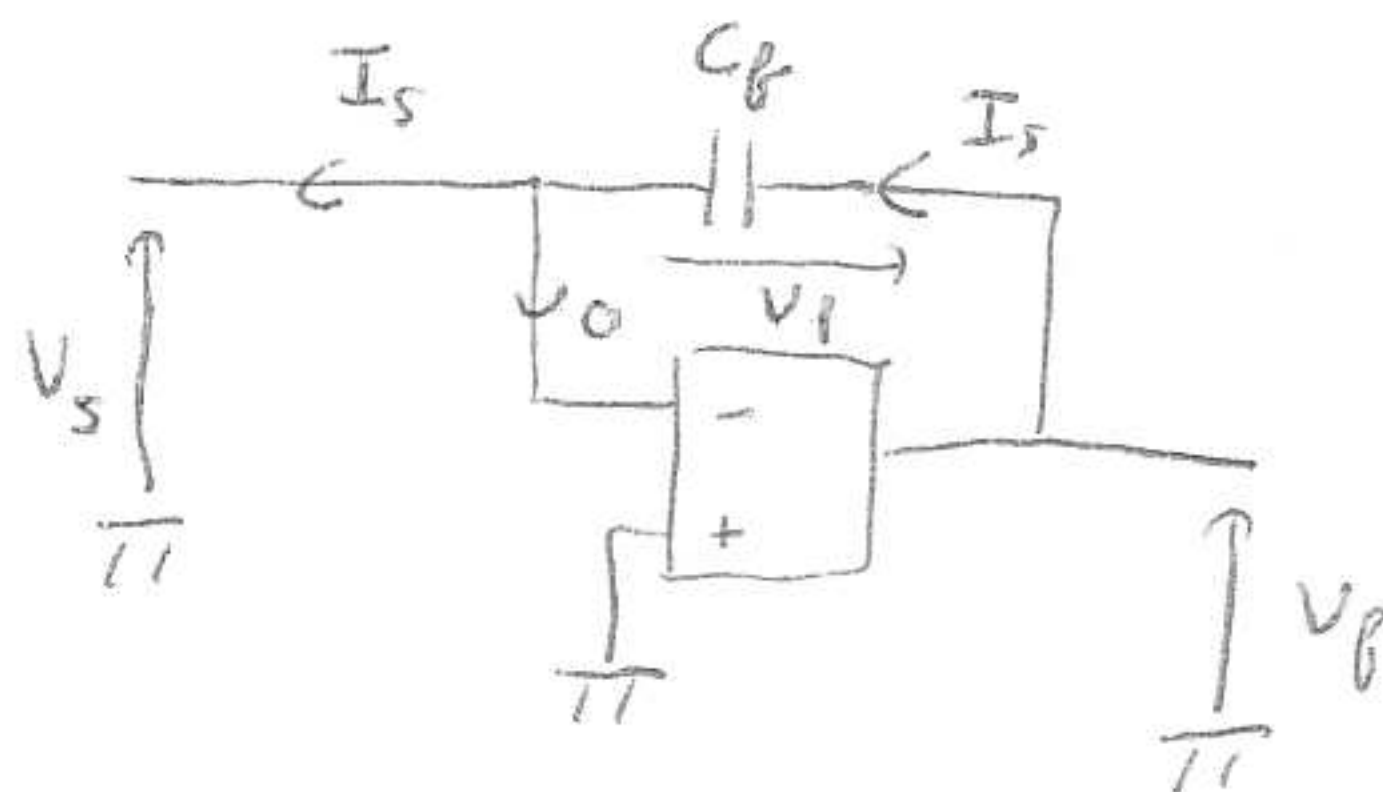
14

$$\underline{V}^- = \underline{V}^+ = 0 = \underline{V}_s$$

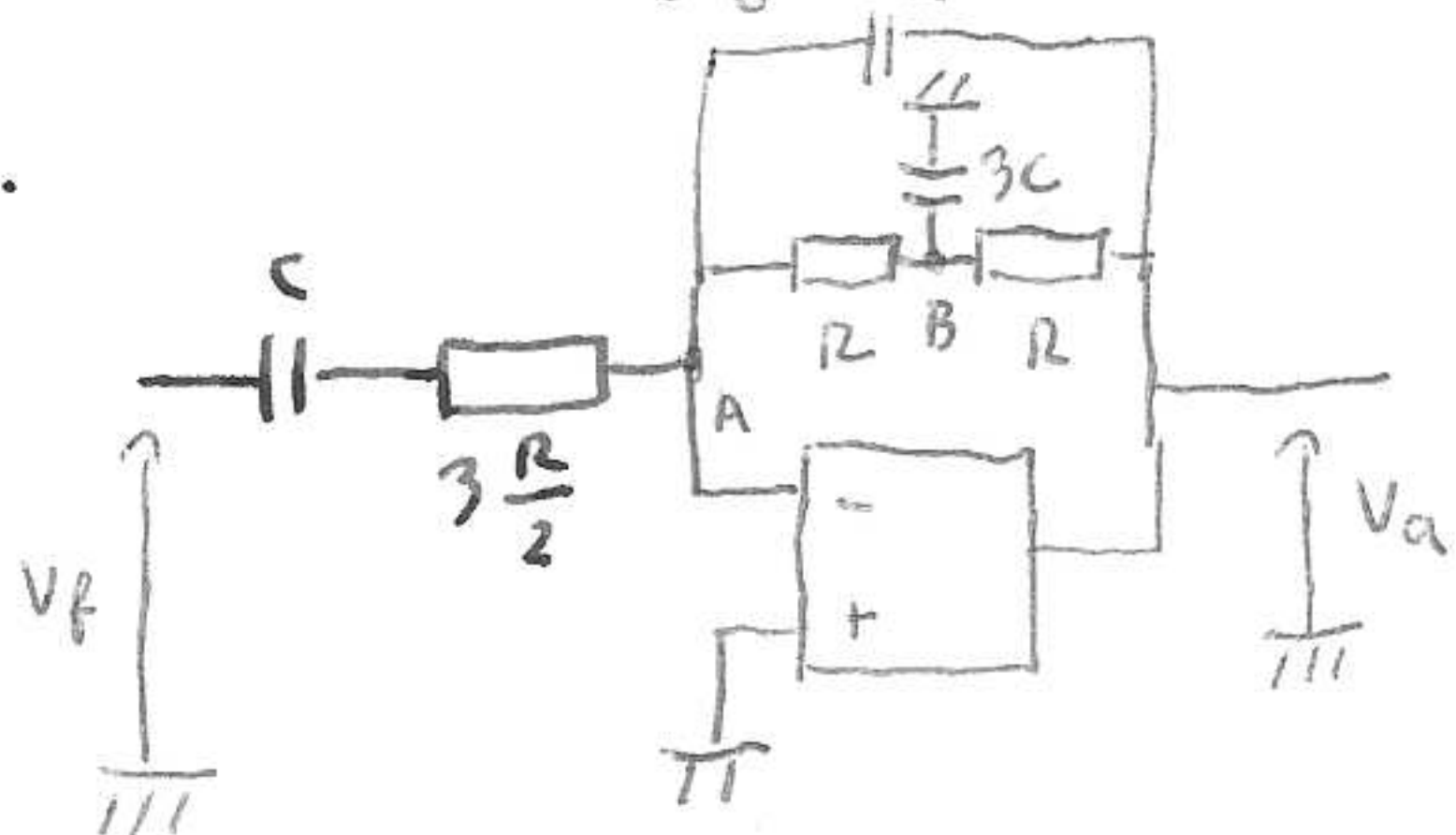
$$\underline{V}_\beta = \frac{\underline{I}_s}{j\omega C_\beta}$$

$$\text{et } \underline{V}_x = 2\underline{V}_s - \frac{\underline{I}_s}{j\omega C_o}$$

$$\underline{V}_x = -\frac{\underline{I}_s}{j\omega C_o} \Rightarrow \underline{I}_s = -j\omega C_o \underline{V}_x \text{ et } \underline{V}_\beta = \frac{-C_o \underline{V}_x}{C_\beta}$$



Q55.



$$\underline{V}_A = \underline{V}^+ = 0.$$

Appliquons la th de Millman en A :

$$\frac{\underline{V}_\beta}{3\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{\underline{V}_a}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{\underline{V}_B}{R} = 0$$

Th de Millman en B :

$$\underline{V}_B = \frac{\frac{\underline{V}_A}{R} + \frac{\underline{V}_a}{R} + 0}{\frac{2}{R} + j\omega C} = \frac{\underline{V}_a}{2 + j\omega RC}$$

$$\text{On remplace : } \frac{\underline{V}_\beta}{3\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C}} = -j\omega C \underline{V}_a - \frac{\underline{V}_a}{R} \frac{1}{2 + j\omega RC}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\underline{V}_\beta}{\underline{V}_a} &= \left(3\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C} \right) \left(-j\omega C - \frac{1}{R(2 + j\omega RC)} \right) \\ &= \left(\frac{3Rj\omega C + 2}{2j\omega C} \right) \left(-j\omega C - \frac{1}{R(2 + j\omega RC)} \right) \\ &= -\frac{3Rj\omega C}{2} - 1 - \frac{1}{2Rj\omega C} = -1 + j\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}RC\omega} - \sqrt{3}RC\omega \right) \end{aligned}$$

$$\text{on a donc bien } \frac{\underline{V}_a}{\underline{V}_\beta} = -\frac{1}{1 - j\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}RC}$$

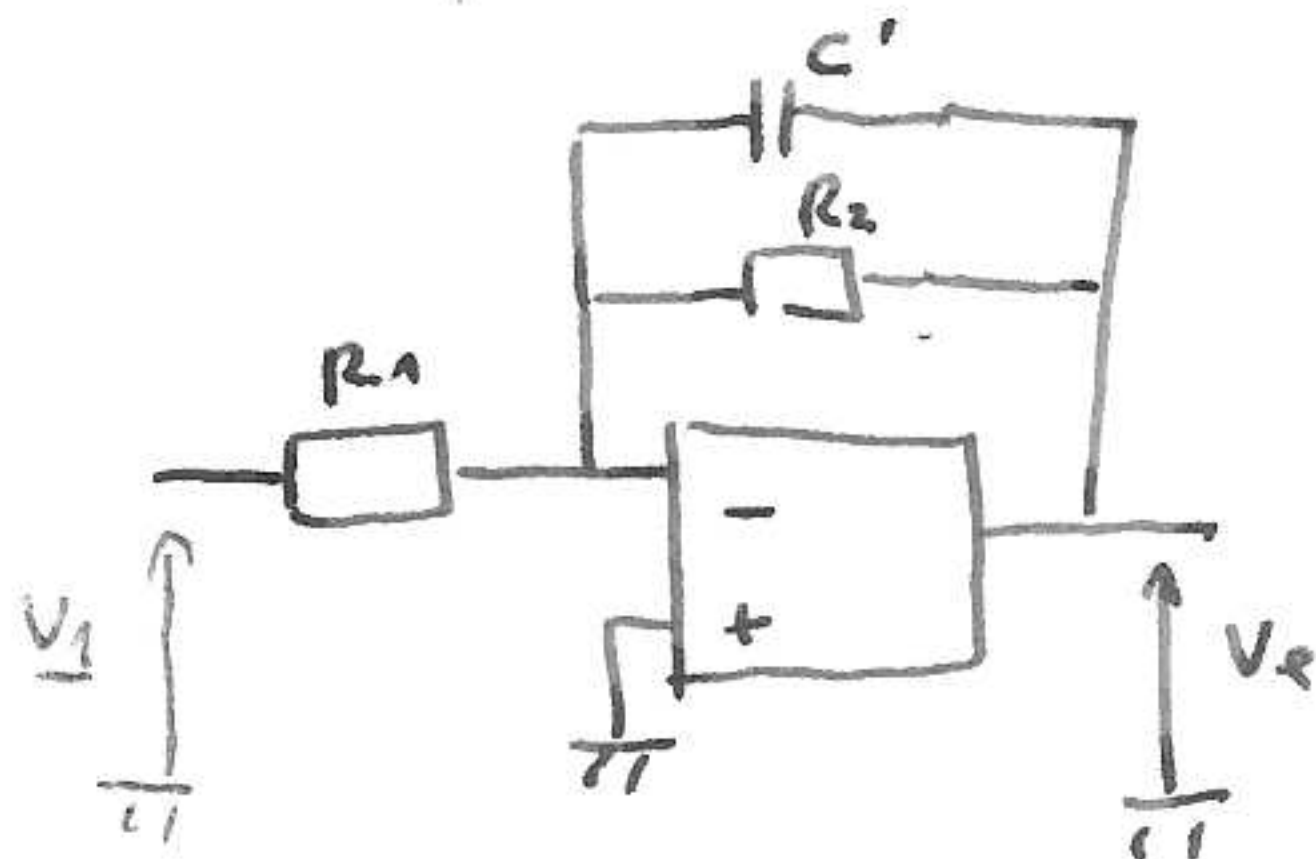
Il s'agit d'un montage passe-bande sélectionnant autour de ω_0 .

Il faut choisir $3, R$ et C tels que $\omega_0 = \omega_d$. Le rôle de ce montage est

d'éliminer les fréquences autres que ω_d dont l'existence est mentionnée Q52.

Q56.

15



V_1 représente une composante du signal $V_d V_a$.

$$V^- = V^+ = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} (1 + j\omega C' R_2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{-1}{R_1 \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C' \right)} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + j\omega R_2 C'}$$

Il s'agit d'un montage de détection synchrone, permettant de récupérer une composante continue dont l'amplitude est $V_d^{(u)} \frac{C_0}{C_b} \frac{\Delta C}{C_0} V_d^{(u)} \frac{R_2}{R_1}$
 bien proportionnelle à ΔC .

IV les premiers résultats de MICROSCOPE

Q57. $S_{mes}(\theta)$ est la transformée de Fourier de $R_{mes}(\tau)$, qui s'exprime en m^2 . Donc $[S_{mes}(\theta)] = m^2 \cdot s = m^2 \cdot Hz^{-1}$, et $\sqrt{S_{mes}(\theta)}$ est donc bien en $m \cdot Hz^{-\frac{1}{2}}$.

$$\therefore [S_{pos}(\theta)] = (m \cdot s^{-2})^2 \cdot s = m^2 s^{-3}, \text{ donc } [\sqrt{S_{pos}(\theta)}] = m s^{-\frac{3}{2}}.$$

Q58. Si on raisonne sur une composante spectrale

$$\frac{d\ddot{x}}{dt} = -(2\pi\theta)^2 \underline{x}, \text{ donc } S_{pos}(\theta) = |(2\pi\theta)^2|^2 S_{mes}(\theta)$$

$$\sqrt{S_{pos}(\theta)} = (2\pi\theta)^2 \sqrt{S_{mes}(\theta)}$$

Q59. Pour un système masse-ressort, la relation entre accélération et position est donnée par une équation d'oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k_b}{m_c}}_{\substack{\text{pulsation} \\ \text{propre} \\ \text{au cane}}} x = 0, \text{ on a donc } \frac{k_b}{m_c} \text{ qui remplace le } (2\pi\theta)^2 \text{ de la Q58.}$$

$$\sqrt{S_{pos}(\theta)} = \frac{k_b}{m_c} \sqrt{S_{mes}(\theta)}$$

Q60. Equation du mot de la masse de test :

$$m_c \ddot{x} = -K_\beta x - m_c \beta \dot{x} + F$$

En raisonnant sur une composante spectrale

$$-m_c \omega^2 \underline{x} = -K_\beta \underline{x} - m_c \beta j\omega \underline{x} + \underline{F}$$

$$\underline{x} (K_\beta + m_c \beta j\omega - m_c \omega^2) = \underline{F} \Rightarrow \underline{x} = \frac{\underline{F}}{K_\beta + m_c \beta j\omega - m_c \omega^2}$$

$$\Rightarrow S_x(\omega) = S_F(\omega) \frac{1}{|K_\beta + m_c \beta j\omega - m_c \omega^2|^2} = \frac{G_0}{(K_\beta - m_c \omega^2)^2 + (m_c \beta \omega)^2}$$

Q61. $R_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \langle x^2(t) \rangle$ en $\tau=0$.

or $\langle \frac{1}{2} K_\beta x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$ d'après le théorème d'équipartition.

Ponc $R_x(\tau=0) = \frac{k_B T}{K_\beta}$

$$\begin{aligned} \text{On } R_x(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_0}{(K_\beta - m_c 4\pi^2 \omega^2)^2 + m_c^2 \beta^2 4\pi^2 \omega^2} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_0}{\left(\frac{K_\beta}{m_c 4\pi^2} - \omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2 \omega^2}{4\pi^2}} d\omega \stackrel{\text{formule}}{=} \frac{G_0}{\left(\frac{K_\beta}{m_c 4\pi^2}\right)^2} \frac{\pi}{\frac{\beta}{2\pi} \frac{K_\beta}{m_c 4\pi^2}} = \frac{G_0 2\pi^2}{m_c 4\pi^2 \beta K_\beta} \end{aligned}$$

$$\frac{k_B T}{K_\beta} = \frac{G_0}{2 m_c \beta K_\beta} \Rightarrow G_0 = 2 \beta k_B T m_c$$

Q62. $\underline{F} = j\omega \underline{x} \left(\underbrace{\frac{K_\beta}{j\omega} + m_c \beta - \frac{m_c \omega^2}{j\omega}}_{\underline{Z}} \right) \quad \text{Re}(\underline{Z}) = m_c \beta$

cela donne bien $S_F(\omega) = G_0 = 2 k_B T \text{Re}(\underline{Z})$

Q63. Avec les nouvelles bases, on a $\underline{F} = \underline{x} (K_\beta (1+j\varphi) - m_c \omega^2)$

$$\underline{F} = j\omega \underline{x} \left(\underbrace{j\omega m_c + K_\beta (-j\omega + \frac{\varphi}{\omega})}_{\underline{Z}} \right)$$

$$2 Re(\underline{z}) = 2 K_B \frac{\Psi}{\omega}$$

$$\text{donc } G_0 = \frac{K_B \Psi}{\pi \beta} k_B T$$

$$\text{et } S_F = \frac{F}{m_c} \Rightarrow S_{\text{relax}}(\beta) = \frac{S_F(\beta)}{m_c} \Rightarrow \sqrt{S_{\text{relax}}(\beta)} = \frac{1}{m_c} \sqrt{k_B T \frac{K_B \Psi}{\pi \beta}}$$

Q64. On relève $\beta_{PE} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$ sur la figure 4.1, et

$$\sqrt{S_{SP}(\beta_{PE})} = 6 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ Hz}^{-\frac{1}{2}}$$

D'après les questions précédentes, $\sqrt{S_{pos}(\beta)} = (2\pi\beta)^2 \sqrt{S_{mes}(\beta)}$ et $S_{pos} = S_{\frac{d^2 x}{dt^2}}$
 $\sqrt{S_{pos}(\beta)} = \frac{K_B}{m_c} \sqrt{S_{mes}(\beta)}$

Le rapport $\frac{(2\pi\beta)^2}{K_B} m_c = \frac{4\pi^2 (3 \cdot 10^{-3})^2}{10^{-5}} \approx 0,14 = 14$ montre qu'à β_{PE} ,

$\sqrt{S_{pos}}$ est plus faible.

Q65. les pentes des droites, peuvent être estimées à $-\frac{1}{2}$ et 2. $\sqrt{S_{relax}} \propto \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

Cela suggère que les fluctuations thermiques dominent à basse fréquence, et que celle en position domine à haute fréquence (présence du β^2).

Q66. les pics dus aux pics d'alignement sont à $2\omega_s$, soit $2\beta_{PE}$, pour un fonctionnement en mode inertiel.

Q67. Incertitude de, répétabilité type A.

Q68. les points de mesure sont au dessus du niveau des erreurs systématiques estimées.

Q69. Le paramètre d'Eötvos est toujours nul si on suppose le pp d'équivalence vérifié.

Q70. $\varepsilon_{F+|F|} = (4 \pm 4) \cdot 10^{-15}$: la valeur 0 est dans l'intervalle de confiance.

à $2\sigma = 8 \cdot 10^{-15}$. Cela valide le pp d'équivalence, mais plutôt à 10^{-14} près ?

la deuxième mesure confirme à 10^{-14} .