

Partie I Principe des capteurs pneumatiques

Q1) $\boxed{dm(t) = \underbrace{A(x,t) dx}_{\text{volume}} \cdot \rho(x,t)}$ De même $\boxed{dm(t+dt) = A(x,t+dt) dx \rho(x,t+dt)}$

Q2) $S_{me} = D_{me} dt$ où D_{me} est le débit massique entrant = $\rho S v$ pour cet écoulement unidimensionnel.

de même $\boxed{S_{ms} = \rho(x+dx,t) A(x+dx,t) v(x+dx,t) dt}$

Q3) Or $dm(t+dt) = dm(t) + S_{me} - S_{ms}$

d'où $dx[A\rho(x,t+dt) - (A\rho)(x,t)] = [(\rho A v)(x,t) - (\rho A v)(x+dx,t)] dt$

On fait les 2 développements limités (DL) à l'ordre 1.

$$dx \frac{\partial A\rho}{\partial t} dt = - dt \frac{\partial (\rho A v)}{\partial x} dx$$

On simplifie par $dx dt$: $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(A \cdot \rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot A \cdot v) = 0}$

Q4) On remplace $A \cdot \rho = [A_0 + a_1(x,t)] \cdot [\rho_0 + \rho_1(x,t)]$
 $= A_0 \rho_0 + A_0 \rho_1(x,t) + a_1(x,t) \rho_0$ à l'ordre 1
 $\rho \cdot A \cdot v = (\rho_0 + \rho_1(x,t)) (A_0 + a_1(x,t)) (v(x,t))$
 $= \rho_0 A_0 v(x,t)$ à l'ordre 1.

D'où, avec ρ_0 et A_0 des constantes.

$$\boxed{A_0 \frac{\partial}{\partial t}(\rho_1(x,t)) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(a_1(x,t)) + \rho_0 A_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0} \quad (1)$$

Q5) $\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad}(P)}$ (on néglige la pesanteur, la viscosité...)

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$$

$$\text{grad}(P) = \text{grad}(P_0) + \text{grad}(p_1(x,t))$$

$\uparrow$ P_0 est uniforme

Q6) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ dérivée partielle $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ dérivée (ou accélération) convective.

$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ est un infiniment petit d'ordre 2

$(\rho_0 + \rho_1(x,t)) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(x,t) = \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(x,t)$ car $\rho_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est aussi un infiniment petit d'ordre 2

d'où $\boxed{\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}} \quad (2)$ après projection sur $\vec{e}_x$

Q7) $A(x,t) D = \frac{\partial A}{\partial P} \Big|_S$ or $A = A_0 + a_1(x,t)$
 $P = P_0 + p_1(x,t)$

et on peut annuler une dérivée

à un rapport de petites variations. $\frac{\partial A}{\partial P} \approx \frac{dA}{dP} = \frac{a_1}{p_1}$

d'où $p_1(x,t) (A_0 + a_1(x,t)) D = a_1(x,t)$. On néglige $p_1 \times a_1$:

$$\boxed{a_1(x,t) = A_0 D p_1(x,t)} \quad (3)$$

Q8) On procède de même avec $p(x,t) \times X_S = \frac{\partial P}{\partial P} \approx \frac{p_1(x,t)}{p_1(x,t)}$

d'où $\boxed{p_1(x,t) = p_0 X_S p_1(x,t)}$ (4)

Q9) Je copie (1): $A_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} + p_0 \frac{\partial a_1}{\partial t} = -p_0 A_0 \frac{\partial v}{\partial x}$

J'utilise (3) et (4)

$$\cancel{A_0 p_0} X_S \frac{\partial p_1}{\partial t} + \cancel{p_0 A_0} D \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\cancel{p_0 A_0} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Soit: $\boxed{(X_S + D) \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0}$ (5)

Q10) (2) s'écrit: $p_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x}$

Je dérive (5) par rapport à t et (2) par rapport à x

$$(X_S + D) \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = 0$$

$$p_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{et } \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \end{aligned} \right\} \text{d'après le théorème de Schwarz}$$

d'où $(X_S + D) \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{1}{p_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0$

Que je réécris: $\boxed{\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{1}{p_0 (X_S + D)} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}}$

qui est une équation de d'Alembert de célérité

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{1}{p_0 (X_S + D)}}}$$

p_0 est en kg m^{-3}

d'après (3) $a_1 = A_0 D p_1$, $D p_1$ est sans dimension donc D (et X_S) est

en $\text{Pa}^{-1} = (\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2})^{-1}$.

d'où $\sqrt{\frac{1}{p_0 (D + X_S)}}$ est en $\left((\text{kg m}^{-3})^{-1} \cdot \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2} \right)^{1/2}$

$$= (\text{m}^2 \text{s}^{-2})^{1/2} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{C'est bien homogène.}$$

Q11) A.N. $\boxed{c = 2,5 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

Q12) Essayer un tube souple finit par l'endommagement. S'il y a une ferme dans le tuyau, l'air en sort et le signal ne se propagera pas ~~dans~~ jusqu'au capteur.
"la voiture passe"

Q13) 10 jours.

Q14) `print([mesures[i, 13] for i in range(10)])`

Q15) `for i in range(10):`

`print('nb véhicules détectés le', i, 'ème jour:', np.sum(mesures[i,:]))`

Q16) `max = 0.`

`for i in range(10):` # i est le n° du jour

`for j in range(24):` # j est le n° du créneau horaire

`if mesures[i, j] > max:`

`max = mesures[i, j]`

`jour, heure = i, j`

`print('le pic vaut', max, 'véhicules/heure.')`

`print('le pic est atteint le', jour, 'ème jour entre', heure, 'et',
heure+1, 'heures.')`

jour + 1 parce qu'on compte à partir de 1 et python à partir de 0

Q17) `heure = [h for h in range(1, 25)]`

`plt.bar(heure, [mesures[0, j] for j in range(24)])`

0 pour le 1^{er} jour et python compte à partir de 0.

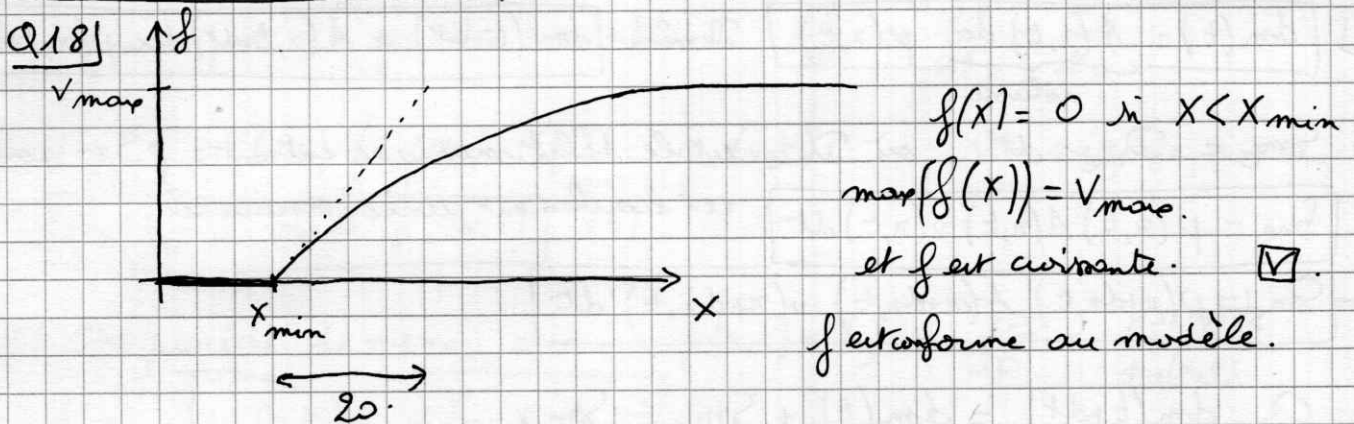
`plt.grid()`

`plt.xlabel('Heure')`

`plt.ylabel('Nombre de véhicules')`

`plt.title('Nombre de véhicules détectés le premier jour')`

Partie II : modélisation microscopique d'un embouteillage routier.



Q19] si V est la même ($\neq 0$) pour tous les véhicules, i.e. que $x > x_{\min}$ et que x est le même pour tous les véhicules car $f(x)$ est strictement croissante sur $[x_{\min}, +\infty[$ donc bijective et continue.

Si V augmente, x augmente (mêmes raisons)

$V \leq V_{\max}$ dans tous les cas.

Q20] Si $x < x_{\min}$, le trafic est à l'arrêt. Les véhicules ne veulent plus.

Q21] $V = V_{\max} \left(1 - \exp\left(-\frac{x - x_{\max}}{20}\right)\right)$

$$\exp\left(-\frac{x - x_{\max}}{20}\right) = 1 - \frac{V}{V_{\max}}$$

$$x = x_{\max} - 20 \ln\left(1 - \frac{V}{V_{\max}}\right)$$

AN $x = 29 \text{ m}$

Q22] A 20 km/h, la distance parcourue en $\Delta t = 1 \text{ s}$ est $D = V \times \Delta t = 5,6 \text{ m}$

Donc la distance recommandée est 11 m

Le modèle correspond à des conducteurs beaucoup plus prudents

Q23] $N, \Pi = 10$, résultat [0]

je suppose que résultat est une liste de listes et pas un tableau numpy.

Q24] $L = \text{np.zeros}(N, \text{len}(\Pi))$

Q25] for m in range(N): # 10 véhicules

$L[m, 0] = -d * m$ # L est 1 tableau numpy.

Q26) $L[0,:] = M$.

Q27) def $f(x)$:

if $x \leq x_{\min}$:

return 0

else:

return $V_{\max} * (1 - \exp(-(x - x_{\min})/\delta))$

je suppose la fonction exp importée

Q28)

$$\dot{x}_n = f(x_{n-1} - x_n)$$

avec $\dot{x}_n = \frac{x_n(t+dt) - x_n(t)}{dt}$

d'où $x_n(t+dt) = x_n(t) + f(x_{n-1}(t) - x_n(t)) * dt$

en discrétisant: $x_n^{m+1} = x_n^m + f(x_{n-1}^m - x_n^m) * (t_{m+1} - t_m)$

Q29) $T = \text{resultats}[1]$

Toujours avec resultats une liste de listes

Q30) for m in range(0, len(T)-1):

c'est les numéros

for n in range(1, N):

je ne calcule pas les ^{des instants} positions à $t=0$ ni pour $m=0$

$$\text{calc} = f(L[n-1, m] - L[n, m])$$

$$\text{calc} = \text{calc} * (T[m+1] - T[m])$$

$$L[n, m+1] = L[n, m] + \text{calc}$$

Q31) Le ralentissement est la zone où les points sont tout serrés.

Étonnamment, il se propage vers les x décroissants. (cela dépend peut-être des choix de $x_{\min}$, $V_{\max}$ et δ (ici = 20))

Ici à $t_1 = 10$ s, la tête du ralentissement est en $x_1 = 110$ m et à $t_2 = 17$ s

on $x_2 = 70$ m

d'où $V_{\text{ral}} = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} = -6 \text{ m.s}^{-1}$

Je n'ai pas une meilleure précision

Q32)

$$\dot{x}_n = f(x_{n-1} - x_n)$$

et $V = f(d)$

ou $\dot{y}_n = \dot{x}_n - V$

$$\dot{y}_n = f(x_{n-1} - x_n) - f(d)$$

$$\dot{y}_n = f(x_n) - f(d)$$

Q33] Or X_n est proche de d (en tout cas on le suppose parce que l'énoncé demande de faire un DL1)

$$f(X_n) = f(d) + f'(d) * (X_n - d).$$

d'où $\dot{y}_n(t) = f'(d) * (X_n(t) - d)$

Q34] De même $\dot{y}_{n-1}(t) = f'(d) * (X_{n-1}(t) - d)$

Je fais la différence $\dot{y}_n(t) - \dot{y}_{n-1}(t) = f'(d) * (X_n(t) - \cancel{d} - X_{n-1}(t) + \cancel{d})$

or $X_n = x_{n-1} - x_n$ donc $\dot{X}_n = \dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n$
 $= \dot{y}_{n-1} - \dot{y}_n$

d'où $\dot{X}_n(t) = -f'(d) * (X_n(t) - X_{n-1}(t)) = f'(d) * (X_{n-1}(t) - X_n(t))$

Q35] $X(x+d, t) = X(x, t) + \frac{\partial X}{\partial x}(x, t) * d$

d'où $X_{n-1}(t) - X_n(t) = X(x+d, t) - X(x, t)$
 $= d * \frac{\partial X}{\partial x}(x, t)$

Ainsi $\frac{\partial X}{\partial t}(x, t) = f'(d) * d * \frac{\partial X}{\partial x}(x, t)$

c'est $\dot{X}(x, t)$ On a l'équation (3) avec $c = d * f'(d)$

Q36] Ce sont des dérivées d'ordre 1 en x et en t donc ce n'est ni réversible en t ni réversible en x

Q37] $\frac{\partial X(x+ct)}{\partial t} = c * X'(x+ct)$ (composition des dérivées).

$\frac{\partial X(x+ct)}{\partial x} = 1 * X'(x+ct)$

d'où $\frac{\partial X}{\partial t} = c \frac{\partial X}{\partial x}$ CQFD

L'onde se propage vers les x décroissants ($f(x+ct)$) à la célérité c .
 Je n'ai pas vérifié les valeurs numériques mais cela semble compatible.
 Dans la limite où on ne voit que 10 points, on a bien l'impression que le ralentissement se propage "en bloc" vers les x décroissants.

En vinture!

CCINP PC 2024 Modélisation

Partie III : Etude de la batterie d'une voiture électrique

Q38] C'est le 1^{er} alcalin: 2^e période et 1^{ère} colonne

Q39] Li: $1s^2 2s^1$

Li⁺: $1s^2$

← vérifie la règle de l'octet/duet, c'est-à-dire a la structure électronique du gaz rare le plus proche

Q40] $Li^+ + e^- = Li$ et $C_6 + Li = C_6Li$

Q41] $C_6 + Li^+ + e^- = C_6Li$ E1

Q42] Li est sous forme Li⁺ donc au degré d'oxydation +I

O est le plus souvent sous forme O²⁻ donc au degré -II

donc dans LiNiO₂ neutre Ni est au degré +III

et dans NiO₂, au degré +IV

$LiNiO_2 = Li^+ + NiO_2 + e^-$ E2

Q43] E1 + E2 donne $C_6 + LiNiO_2 = C_6Li + NiO_2$

Q44] Chaque mole de LiNiO₂ peut libérer 1 mole d'électrons soit

$q = 36500 \text{ C}$ Or $m = 1 \text{ g}$ représente $n_1 = \frac{m}{M} = 0,010 \text{ mol}$

donc $Q = 3,8 \cdot 10^2 \text{ C} \cdot \text{g}^{-1}$

$Q = 0,27 \text{ A.h.} \cdot \text{g}^{-1}$

avec $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$

$= \frac{1}{3600} \text{ A.h.}$

Q45] Seul le nombre d'éléments en série compte.

La tension vaut $V_{\text{tot}} = 196 \times 3,7 = 7,3 \cdot 10^2 \text{ V}$.

Q46] Les anions O^{2-} sont aux sommets d'une maille conventionnelle cubique ainsi qu'au centre des faces du cube. Les sites tétraédriques sont au centre des 8 petits cubes de côté $\frac{a}{2}$

Les sites octaédriques sont au centre de la maille et au milieu de chaque arête.

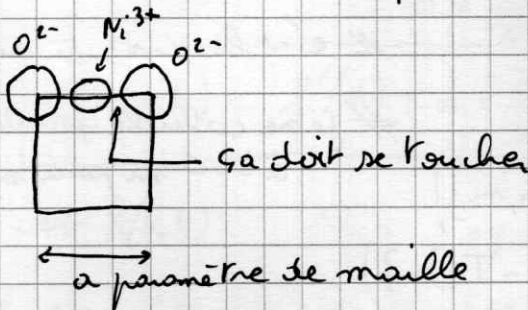
Q47] Il y a $8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$ ions O^{2-} par maille
sommets faces

Q48] Il y a autant d'ions Ni^{3+} que d'ions Li^+ et la maille est non chargée donc il faut 2 ions Ni^{3+} et 2 ions Li^+ par maille
 charge totale: $4 \times (-2) + 2 \times (3) + 2 \times (1) = 0$.

Il y a $1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4$ sites tétraédriques donc $\frac{1}{2}$ sont occupés par Ni^{3+}
centre arête

Il y a 8 sites tétraédriques (8 petits cubes) donc $\frac{1}{4}$ sont occupés par Li^+

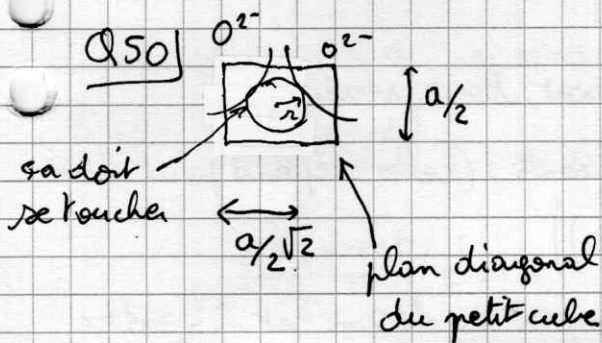
Q49]



$$2r_{(O^{2-})} + 2r_{(Ni^{3+})} = a$$

d'où $a = 408 \text{ pm}$

Q50]



$$r + r_{(O^{2-})} = \frac{1}{2} \text{ diagonale} = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

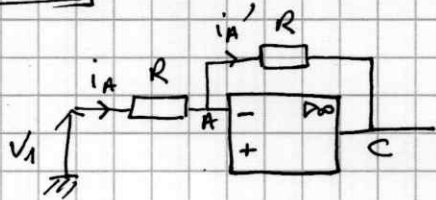
d'où $r_{\text{max}} = \frac{a\sqrt{2}}{4} - r_{(O^{2-})}$

d'où $r_{\text{max}} = 37 \text{ pm}$

Le cristal est déformé.

En wire CCINP PC 2024 Modélisation

Q51)



Comme $i_- = 0$ (ALI idéal) alors

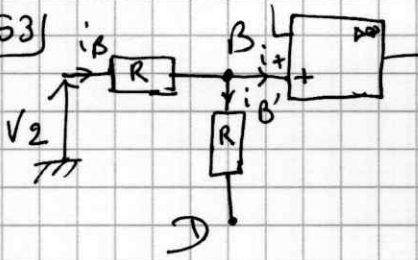
$$i_A = i_{A'}$$

$$\frac{V_1 - V_A}{R} = \frac{V_A - V_C}{R}$$

d'où $V_A = \frac{V_1 + V_C}{2}$

Q52) L'ALI2 est monté en niveau $U = V_+ = V_- = V_D$.

Q53)

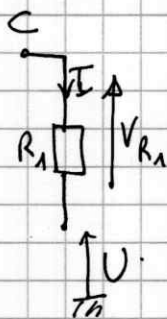


Comme $i_+ = 0$ (ALI idéal) alors $i_B = i_{B'}$

$$\frac{V_2 - V_B}{R} = \frac{V_B - V_D}{R} \quad \text{soit} \quad V_B = \frac{V_2 + V_D}{2}$$

et d'après Q52: $V_B = \frac{V_2 + U}{2}$

Q54)



$$V_{R1} = V_C - U = R_1 I$$

donc $V_C = R_1 I + U$

On a $V_A = \frac{V_1 + V_C}{2}$

$$V_B = \frac{V_2 + U}{2}$$

$$V_C = R_1 I + U$$

$V_A = V_B$ (ALI en régime linéaire)

d'où $\frac{V_1 + R_1 I + U}{2} = \frac{V_2 + U}{2}$

et ainsi $I = \frac{V_2 - V_1}{R_1}$

Tant que l'ALI est en régime linéaire et que V_1 et V_2 sont constantes, I reste constante

Q55) $I = \frac{dQ}{dt}$

d'où $Q(t) = Q(0) + \int_0^t I(t) dt$ soit $Q(t) = \int_0^t I(t) dt$

Q56) $Q(t_{k+1}) = \int_0^{t_{k+1}} I(t) dt$ et $Q(t_k) = \int_0^{t_k} I(t) dt$

d'où $Q(t_{k+1}) - Q(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} I(t) dt$

Q57) On utilise la formule de l'énoncé en l'adaptant

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} I(t) dt = (t_{k+1} - t_k) \frac{I_{k+1} + I_k}{2}$$

d'où
$$Q_{k+1} = Q_k + (t_{k+1} - t_k) \frac{I_{k+1} + I_k}{2}$$

Q58] charge = [0]

je considère qu'on ne doit pas utiliser numpy.

la charge initiale est connue.

for k in range(N-1): # on ne calcule que N-1 points

$$Q = \text{charge}[k] + (\text{temps}[k+1] - \text{temps}[k]) * (\text{intensite}[k] + \text{intensite}[k+1]) / 2$$

charge.append(Q).

print(Q[-1])

Q59] On a calculé $Q = 0,27 \text{ A.h.g}^{-1}$ (pas renvée comme notation)
et on a $Q_{\text{map}} = 3,9 \text{ A.h.}$

d'où
$$m = \frac{Q_{\text{map}}}{Q} = 14 \text{ g}$$

Ily a 14 g d'oxyde lithié dans la cellule

Multiplié par 136×46 , cela fait 130 kg pour la batterie entière.

Fin